

1901.

N. 10.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GRÜN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDERMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 6. HEFT 2.

DES GANZEN KRIEHE 211. BANDS 2. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.



LEIPZIG, 1901.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den  
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in  
12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 38 M.*

*(Ausgegeben am 3. Oktober 1901.)*

# Inhalt.

	Seite
1. M. Abraham. Energie elektrischer Drahtwellen . . . . .	217
2. L. Holborn. Untersuchungen über Platinwiderstände und Petrolätherthermometer . . . . .	243
3. F. Tamm. Ueber den Einfluss des Luftdruckes und der Luftfeuchtigkeit auf die Entladung statischer Elektrizität aus Spitzen . . . . .	250
4. M. Thiesen. Ueber die angebliche Anomalie des Sauerstoffs bei geringem Drucke . . . . .	280
5. H. Schultze. Ueber die innere Reibung von Helium und ihre Aenderung mit der Temperatur . . . . .	302
6. R. Gans. Ueber die Abhängigkeit der elektrolytischen Ueberführung und der elektromotorischen Kraft reversibler Elemente von physikalischen Einflüssen . . . . .	313
7. J. Sauter. Zur Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien . . . . .	331
8. M. Toepler. Einfluss von Diaphragmen auf elektrische Dauerentladung durch Luft von Atmosphärendruck . . . . .	339
9. L. Matthiessen. Das astigmatische Bild des horizontalen, ebenen Grundes eines Wasserbassins . . . . .	347
10. E. Knoblauch. Beitrag zur Kenntniss der Spitzenentladung aus einem Tealapole . . . . .	353
11. L. Silberstein. Symbolische Integrale der elektromagnetischen Gleichungen, aus dem Anfangszustand des Feldes abgeleitet, nebst Andeutungen zu einer allgemeinen Theorie physikalischer Operatoren . . . . .	373
12. H. Kreusler. Ueber den photoelektrischen Effect in der Nähe des Funkenpotentials . . . . .	393
13. H. Kreusler. Anwendung des photoelektrischen Stromes zur Photometrie der ultravioletten Strahlen . . . . .	413
14. M. Eschenhagen. Werte der erdmagnetischen Elemente zu Potsdam für das Jahr 1900, sowie der Söcularvariationen für die Zeit von 1890 bis 1900 . . . . .	424
15. H. Thiele und M. Eckardt. Ueber quecksilbergedichtete Hähne . . . . .	429
16. J. Zenneck. Berichtigung . . . . .	434

Manuscripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drude, zu senden. Seine Adresse ist Glessen, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuscripte druckfertig einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuszeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortsehriften der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.







# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 6.

### 1. *Energie elektrischer Drahtwellen;* *von Max Abraham.*

#### § 1. Theorie der Fortpflanzung.

In der Theorie der Fortpflanzung elektrischer Schwingungen längs einer Drahtleitung empfiehlt es sich, zwei Fälle zu unterscheiden, den einen, bei dem die Rückleitung des Stromes ausschliesslich durch Leitungsstrom erfolgt, und den anderen, bei dem auch Verschiebungsströme sich an der Rückleitung beteiligen. Die Draht-Telegraphie und -Telephonie hat es mit dem ersteren Falle zu thun, während es bei Schwingungen von der Frequenz der Hertz'schen wesentlich von der Entfernung parallel laufender Leiter abhängt, ob dielektrische Rückleitung in Betracht kommt. Bei senkrecht von der Erdoberfläche aus aufsteigenden Drähten, wie sie bei der Funkentelegraphie verwandt werden, hat man es ausschliesslich mit dielektrischer Rückleitung zu thun.

Es soll zunächst in diesem Paragraphen die Theorie der Fortpflanzung längs einer Drahtleitung behandelt werden, und zwar am Beispiele zweier Paralleldrähte, wobei sowohl der Fall fehlender, wie derjenige mitwirkender dielektrischer Rückleitung in Betracht gezogen werden soll. Wir schliessen uns hier, was den Fall der Rückleitung durch Leitungsstrom anbelangt, im wesentlichen an die Darstellung<sup>1)</sup> von Hrn. E. Cohn an, während wir uns, was die Mitwirkung dielektrischer Rückleitung anbelangt, auf die Untersuchungen der Herren A. Sommerfeld<sup>2)</sup> und G. Mie<sup>3)</sup> stützen. In den folgenden Paragraphen wird sodann die Frage beantwortet, in welchem Zusammenhange die für die Fortpflanzung maassgebenden

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 471—487. Leipzig 1900.

2) A. Sommerfeld, Wied. Ann. **67**. p. 233. 1899.

3) G. Mie, Ann. d. Phys. **2**. p. 201. 1900.

Grössen mit der elektromagnetischen Energie der Drahtwellen stehen.

Wir nehmen durchweg die Stromverteilung in den beiden Drähten als symmetrisch an; zur Drahtoberfläche schiefe Querströme, welche diese Symmetrie stören würden, schliessen wir aus. Bei einem einzelnen Draht ist diese Voraussetzung ohne weiteres erlaubt, bei zwei Paralleldrähten nur dann, wenn der Abstand der Drahtaxen nicht zu klein ist. In Bezug auf die genaue Discussion der Bedingungen für die symmetrische Stromverteilung verweisen wir auf die sehr eingehende Untersuchung des Hrn. G. Mie<sup>1)</sup>, und entnehmen derselben das Resultat, dass es Entfernungen der Drähte giebt, die hinreichend gross sind, um jenen zur Drahtoberfläche schiefen Querstrom vernachlässigen zu dürfen, und doch hinreichend klein, um dielektrische Rückleitung auszuschliessen. Falls der Abstand der Drähte so gross wird, dass die Rückleitung durch Verschiebungsströme zu berücksichtigen ist, ist die Annahme symmetrischer Stromverteilung stets erlaubt.

Die Symmetrie der Stromverteilung bedingt es, dass man für Widerstand ( $R$ ) und innere Selbstinduction ( $L$ ) jedes der beiden Drähte die von Lord Rayleigh<sup>2)</sup> und J. Stefan<sup>3)</sup> berechneten Werte einführen kann, die defint sind durch die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} E_{z1} = R_1 C + L_{11} \frac{\partial C}{\partial t}, \\ E_{z2} = R_2 (-C) + L_{11} \frac{\partial (-C)}{\partial t}. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten  $E_{z1}$ ,  $E_{z2}$  die longitudinalen elektrischen Kräfte, welche an den Oberflächen der Drähte parallel ihrer Axe wirken,  $C$  den Gesamtstrom im ersten und dementsprechend  $(-C)$  den Gesamtstrom im zweiten Draht. Alle diese Grössen denken wir uns in absolutem elektromagnetischem Maasse gemessen. Besitzen beide Drähte gleichen Radius ( $b$ ), gleiche Leitfähigkeit ( $\lambda$ ) und gleiche magnetische Permeabilität ( $\mu$ ), so hat man

$$(1a) \quad R_1 + L_{11} \cdot \frac{2\pi i}{r} = R_2 + L_{12} \cdot \frac{2\pi i}{r} = \frac{4\pi i \mu}{r} \left( \frac{J(x)}{x J'(x)} \right)_{x=k_1 b},$$

1) G. Mie, l. c. p. 241 ff.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 21. p. 381. 1886.

3) J. Stefan, Wied. Ann. 41. p. 400. 1890.

wenn  $\tau$  die Schwingungsdauer bezeichnet,  $J(x)$  die Bessel'sche Function nullter Ordnung erster Art, und endlich, zur Abkürzung, gesetzt ist

$$k_i^2 = - \frac{8 \pi^2 i \cdot \lambda \mu_i}{\tau}.$$

Hat man, wie es bei Hertz'schen Schwingungen in der Regel der Fall ist, sehr starke Concentration des Stromes nach der Drahtoberfläche hin, so nehmen Widerstand und innere Selbstinduction die Werte an

$$(1b) \quad R_1 = \frac{2\pi}{\tau} L_{i1} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\mu_i}{\lambda \tau}}.$$

Auch für das elektromagnetische Feld ausserhalb der Drähte bringt die Voraussetzung symmetrischer Stromverteilung eine erhebliche Vereinfachung mit sich. Es zeigt sich nämlich, dass man bei fehlenden schiefen Querströmen nicht nur in den Drähten, sondern auch im Dielectricum die longitudinale Componente der magnetischen Kraft gleich Null setzen kann, ohne die Grundgleichungen zu verletzen. Es seien  $H$ ,  $E$  magnetische und elektrische Kraft; die  $z$ -Axe mag, parallel den Drahtaxen, in Richtung der Fortpflanzung gezogen sein. Mit Rücksicht auf das Verschwinden der Componente  $H_z$  ergeben die Grundgleichungen:

$$(2) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,$$

$$(2a) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0.$$

Wir betrachten das elektromagnetische Feld in einer Ebene  $z = \text{const.}$ , und zwar ausschliesslich die Componenten parallel dieser Ebene. Das „ebene“ elektrische Feld ist nach (2) ein „potentielles“<sup>1)</sup>, d. h. das Linienintegral der elektrischen Kraft längs einer in jener Ebene verlaufenden Curve hängt nur von den Endpunkten der Curve, und nicht vom sonstigen Verlaufe derselben ab. Als „Spannung“ bezeichnet man den Wert, den jenes Curvenintegral annimmt, wenn man den Anfangspunkt der Curve in die Oberfläche des ersten, den End-

1) Vgl. M. Abraham, Encyclopädie d. mathem. Wissensch. 4. Art. 14. Nr. 6. 1901.

punkt in die Oberfläche des zweiten Drahtes fallen lässt, und versteht unter „Capacität“ ( $Q$ ) der Leitung das Verhältnis der Ladung ( $e$ ) der Längeneinheit des ersten Drahtes zur Spannung.

In entsprechender Weise besagt die Gleichung (2a): *Das ebene magnetische Feld ist ein solenoidales*<sup>1)</sup>, d. h. der magnetische Inductionsfuss durch eine in der Ebene  $z = \text{const.}$  verlaufende Curve hindurch, ist durch Anfangspunkt und Endpunkt der Curve bestimmt und vom sonstigen Verlaufe derselben unabhängig. Legt man die Endpunkte der Curve in die Oberflächen der beiden Drähte, so erhält man die „magnetische Gesamtinduction pro Längeneinheit der Leitung.“ Das Verhältnis der Gesamtinduction zur Stromstärke ( $C$ ) im ersten Draht nennt man „äussere Selbstinduction ( $L_a$ ) pro Längeneinheit der Leitung.“

Beim Einzeldraht kann man Capacität und äussere Selbstinduction analog definiren; nur hat man die Curven von der Drahtoberfläche aus bis in unendliche Entfernung zu ziehen. Stets aber ist zu beachten, dass die Curven in einer zur Drahtaxe senkrechten Ebene verlaufen müssen; nur dann ergeben jene Definitionen eine eindeutige Bestimmung von Spannung und magnetischer Gesamtinduction.

Nunmehr führt das Inductionsgesetz zu der Relation<sup>2)</sup>

$$(3) \quad -L_a \frac{\partial C}{\partial t} = E_{s1} - E_{s2} + \frac{1}{Q} \frac{\partial e}{\partial x}.$$

Setzt man hier für  $E_{s1}$ ,  $E_{s2}$  die durch (1) gegebenen Werte ein, und bezeichnet mit

$$(3a) \quad R = R_1 + R_2$$

und

$$(3b) \quad L_i = L_{i1} + L_{i2}$$

den gesamten Widerstand bez. die gesamte innere Selbstinduction der Leitung, so kann man (3) schreiben:

$$(4) \quad \frac{\partial e}{\partial x} = -Q(L_a + L_i) \cdot \frac{\partial C}{\partial t} - Q R \cdot C.$$

1) M. Abraham, l. c. Nr. 7.

2) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 475.



Da ferner allgemein zeitliche Aenderung der Ladung und räumliche Aenderung des Gesamtstromes durch die Gleichung verknüpft sind

$$(4a) \quad \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial C}{\partial x},$$

so ergibt die Elimination von  $(e)$

$$(4b) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = Q(L_a + L_i) \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + Q \cdot R \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Diese für die Fortpflanzung des Stromes maassgebende Differentialgleichung, die sogenannte „*Telegraphistengleichung*“, deren Ableitung vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie aus wir soeben skizzirt haben, ist wohl zuerst von G. Kirchhoff<sup>1)</sup>, und zwar vom Standpunkte der Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik aus, gewonnen worden.

Will man die Fortpflanzung harmonischer Schwingungen längs der Leitung bestimmen, so hat man in der üblichen Weise Amplitude und Phase des Stromes in einen complexen Wert von  $C$  zusammenzufassen, dessen Abhängigkeit von  $t$  und  $z$  durch den Factor

$$e^{\frac{2\pi i t}{\tau} - qiz}$$

angezeigt wird; hierbei bestimmt die complexe Constante

$$q = \frac{2\pi}{\omega \tau} - ix$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ( $\omega$ ) der Stromphasen und die auf die Längeneinheit bezogene räumliche Dämpfung  $x$ . Für  $q$  ergibt (4b) die Gleichung

$$(5) \quad q^2 = Q \cdot L_a \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - Q \cdot \frac{2\pi i}{\tau} \left(R + L_i \frac{2\pi i}{\tau}\right).$$

Kennt man Widerstand, innere und äussere Selbstinduction und Capacität der Leitung, so kann man mit Hülfe der Gleichung (5) Fortpflanzungsgeschwindigkeit und räumliche Dämpfung berechnen.

Einige Autoren<sup>2)</sup> schlagen den umgekehrten Weg ein. Nachdem sie den Wert von  $q^2$  durch Integration der Grund-

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 100. 1857; Ges. Werke p. 131.

2) G. Mie, l. c. p. 231 ff., sowie insbesondere W. B. Morton, Phil. Mag. (6) 1. p. 563—571. 1901.

gleichungen ermittelt haben, bestimmen sie Widerstand, Capacität und Selbstinduction aus der Gleichung (5). So erhält man beispielsweise bei Ausschluss dielektrischer Rückleitung

$$(6) \quad q^2 = \frac{4\pi^2}{c^2 r^2} \cdot \epsilon \mu_a \left\{ 1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{2d}{b}\right)} \cdot \frac{\mu_i}{\mu_a} \cdot \left( \frac{J(x)}{x J'(x)} \right)_{x=k_i b} \right\},$$

wo  $\epsilon$ ,  $\mu_a$  Dielektricitätsconstante und magnetische Permeabilität des Isolators,  $2d$  den Abstand der Drahtaxen bezeichnen. Man bemerkt, dass (5) und (6) in Uebereinstimmung zu bringen sind, wenn gesetzt wird

$$(6a) \quad R + L_i \cdot \frac{2\pi i}{r} = \frac{8\pi i \mu_i}{r} \left( \frac{J(x)}{x J'(x)} \right)_{x=k_i b},$$

$$(6b) \quad Q = \frac{\epsilon}{4c^2 \ln\left(\frac{2d}{b}\right)},$$

$$(6c) \quad L_a = 4\mu_a \ln\left(\frac{2d}{b}\right).$$

Andererseits ist evident, dass man nicht aus der einen Gleichung, die durch Gleichsetzung der rechten Seite von (5) und (6) resultirt, die drei Gleichungen (6a), (6b), (6c) ableiten kann. Letzteres dürfte auch schwerlich die Meinung der betreffenden Autoren sein. Vielmehr scheinen dieselben stillschweigend die Gültigkeit der Gleichung (6a) für Widerstand und innere Selbstinduction der Leitung aus den Relationen (1a) und (3a), (3b) zu entnehmen, was ja erlaubt ist, wenn Symmetrie der Stromverteilung in den Drähten vorausgesetzt wird. Aber auch dann folgen die Gleichungen (6b), (6c) nicht mit Notwendigkeit, es sei denn, dass eine der beiden Hypothesen hinzutritt.

I.  $Q$  und  $L_a$  sind reell.

II.  $Q$  und  $L_a$  sind unabhängig vom Leitermaterial.

Legt man die Hypothese I zu Grunde, so erhält man durch Gleichsetzung der rechten Seiten von (5) und (6) mit Rücksicht auf (6a)

$$(7) \quad \begin{cases} Q \cdot L_a \cdot \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 - Q \cdot \frac{2\pi i}{r} \left( R + L_i \cdot \frac{2\pi i}{r} \right) = \frac{\epsilon \mu_a}{c^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 \\ - \frac{\epsilon}{4c^2 \ln\left(\frac{2d}{b}\right)} \cdot \frac{2\pi i}{r} \cdot \left( R + L_i \cdot \frac{2\pi i}{r} \right). \end{cases}$$

Diese complexe Gleichung lässt in der That, falls  $Q$  und  $L_a$  reell sind, eine eindeutige Ableitung der reellen Gleichungen (6b), (6c) zu.

Verlangt man andererseits, dass bei Veränderung des Leitermaterials, d. h. bei stetig veränderlichen Werten von

$$\left( R + L_i \cdot \frac{2\pi i}{\tau} \right)$$

die Gleichung (7) stets erfüllt bleibe, und acceptirt die Hypothese II, so folgen wiederum die beiden Gleichungen (6b), (6c).

Die beiden Hypothesen sind indessen keineswegs a priori einleuchtend; sie sind überhaupt nur dann richtig, wenn man Rückleitung durch Verschiebungsströme ausschliesst. Nimmt man Mitwirkung dielektrischer Rückleitung an, so werden beide Annahmen hinfällig. In der That, Hr. G. Mie erhält<sup>1)</sup> in diesem Falle

$$(8) \quad q^2 = \left( \frac{2\pi}{\tau} \right) \cdot \frac{\epsilon \mu_a}{c^2} \left\{ 1 + \frac{\mu_i}{\mu_a \zeta} \cdot \left( \frac{J(x)}{x J'(x)} \right)_{x=k, b} \right\}$$

und setzt demgemäss

$$(8a) \quad Q = \frac{\epsilon}{4 c^2 \zeta},$$

$$(8b) \quad L_a = 4 \mu_a \zeta;$$

$\zeta$  aber bezeichnet eine complexe Grösse, die wesentlich vom Leitermaterial abhängt; hier ist keine der beiden Hypothesen erfüllt, und demnach die Ableitung der Gleichungen (8a), (8b) aus (5), (6a) und (8) nicht zulässig.

Die Absicht dieser Kritik ist indessen keineswegs die, die Gültigkeit der Gleichungen (8a), (8b) für Capacität und äussere Selbstinduction anzuzweifeln, sondern nur darauf hinzuweisen, dass man besser jedesmal auf die oben erwähnten Definitionen dieser Grösse zurückgeht. Für den Fall, dass die Rückleitung ausschliesslich durch Leitungsstrom erfolgt, leitet z. B. E. Cohn in dieser Weise die Werte (6b), (6c) ab. Ebenso habe ich mich durch besondere Rechnungen, die ich hier übergangen will, davon überzeugt, dass bei mitwirkender dielektrischer Rückleitung die Gleichungen (8a), (8b) aus der Definition von Capacität und äusserer Selbstinduction folgen.

1) G. Mie, l. c. p. 231.

Auch für den Grenzfall des Einzeldrahtes führt die Berechnung von  $Q$ ,  $L_a$  aus Spannung und Gesamtinduction zu denselben Werten, die sich auf Grund der soeben kritisirten Schlussweise ergeben.

Für Hertz'sche Schwingungen von der Frequenz

$$\frac{1}{\tau} = 3 \cdot 10^8,$$

die an zwei Platindrähten vom Radius  $b=0,2$  mm fortschreiten, sind die Werte von  $\zeta$  aus folgender Tabelle zu entnehmen, die ich der freundlichen Mitteilung des Hrn. G. Mie verdanke.

$2d$	$\ln\left(\frac{2d}{b}\right)$	$\zeta$	$\ln\left(\frac{2d}{b}\right) :  \zeta $	$\tau\omega$	$\pi$
40	7,6009	$7,582 \cdot e^{i \cdot 6,9'}$	1,0025	99,82	$1,12 \cdot 10^{-4}$
400	9,9035	$9,400 \cdot e^{i \cdot 1^\circ 30,2'}$	1,0535	99,86	$0,92 \cdot 10^{-4}$
1200	11,0021	$9,564 \cdot e^{i \cdot 2^\circ 24,1'}$	1,1505	99,86	$0,92 \cdot 10^{-4}$
$\infty$	—	$9,560 \cdot e^{i \cdot 2^\circ 26,6'}$	—	99,86	$0,92 \cdot 10^{-4}$

Die erste Columne dieser Tabelle giebt die Entfernung der Drahtaxen an, die zweite würde zu berücksichtigen sein, wenn man mit Hülfe der Gleichungen (6b), (6c), welche dielektrische Rückleitung nicht in Betracht ziehen, Capacität und äussere Selbstinduction berechnen wollte. Die dritte Columne lehrt vermöge (8a), (8b) die Abweichung der wirklichen Werte von Capacität und äusserer Selbstinduction von den so berechneten kennen; beim Abstand 40 cm ist die Abweichung noch äusserst gering, bei 400 cm kommt sie bereits in Betracht, bei 1200 cm Abstand verhalten sich die beiden Drähte so, wie zwei Einzeldrähte, deren Felder sich einfach superponiren, sodass für jeden der beiden Drähte die Rückleitung fast ausschliesslich durch den Verschiebungsstrom erfolgt. Der Einfluss der dielektrischen Rückleitung kommt insbesondere in dem Phasenwinkel von  $\zeta$  zur Geltung; dass der Phasenwinkel der complexen Grösse  $\zeta$  stets positiv ist, besagt, wie man aus den Definitionen von  $Q$  und  $L_a$  mit Hülfe der Gleichungen (8a), (8b) ersieht: *Die Spannung ist der Ladung, die magnetische Gesamtinduction dem Strome an Phase voran, falls dielektrische Rückleitung mitwirkt.* Die vorletzte Columne giebt die Wellenlänge der Drahtwellen

an; die Wellenlänge der Luftwellen der gleichen Frequenz würde 100 cm betragen. Die letzte Columnne endlich enthält die räumliche Dämpfung. Auf die Werte von  $\omega$  und  $\kappa$  hat der Phasenwinkel von  $\zeta$  keinen erheblichen Einfluss.

## § 2. Problemstellung; Anwendung des Poynting'schen Satzes.

Man pflegt die Begriffe Capacität, Selbstinduction und Widerstand mit der elektrischen und magnetischen Feldenergie bez. der Joule'schen Wärme in Verbindung zu bringen. Bei Wechselströmen geringer Frequenz ergibt die energetische Definition dieser Grössen keinen Widerspruch mit derjenigen des vorigen Paragraphen, die das Verhältnis der Ladung zur Spannung, bez. der magnetischen Gesamtinduction und der longitudinalen elektrischen Kraft zum Strome als Definition verwendet. Aus dem im vorigen Abschnitte Gesagten ergibt sich aber sofort, dass bei Hertz'schen Schwingungen jene Definitionen im allgemeinen nicht miteinander verträglich sind. Denn die auf Grund der Energie definirten Grössen sind stets wesentlich reell und positiv, während sich aus den Definitionen des vorigen Paragraphen für Capacität und äussere Selbstinduction complexe Werte ergaben, sobald dielektrische Rückleitung mitwirkte. Es entsteht nun die Frage, in welchem Zusammenhange die aus den verschiedenen Definitionen sich ergebenden Werte jener Grössen stehen; dieses soll im Folgenden untersucht werden.

Wir nennen weiterhin, um Missverständnisse zu vermeiden, die oben definirten Grössen  $R$ ,  $L_i$ ,  $L_a$ ,  $Q$  bez. „scheinbaren Widerstand“, „scheinbare innere und äussere Selbstinduction“ und „scheinbare Capacität“, und definiren den „effectiven Widerstand“  $R'$ , die „effective innere und äussere Selbstinduction“  $L'_i$ ,  $L'_a$ , sowie die „effective Capacität“  $Q'$  durch die folgenden Festsetzungen:

Es mögen  $\bar{e}^2$ ,  $\bar{C}^2$  über eine ganze Schwingung erstreckte zeitliche Mittelwerte der Quadrate von Ladung der Längeneinheit eines Drahtes ( $e$ ) und Stromstärke ( $C$ ) bedeuten. Dann soll der auf eine ganze Schwingung bezogene zeitliche Mittelwert der elektrischen Energie für die Längeneinheit der Leitung betragen

$$\bar{W}_e = \frac{\bar{e}^2}{2 Q'}$$

Der zeitliche Mittelwert der magnetischen Energie der Längeneinheit der Leitung soll betragen

$$\overline{W_{ma}} = \frac{L_a'}{2} \cdot \overline{C^2}$$

für den Isolator,

$$\overline{W_{mi}} = \frac{L_i'}{2} \cdot \overline{C^2}$$

für das Innere der Drähte. Der zeitliche Mittelwert der in der Längeneinheit der Drahtleitung entwickelten Joule'schen Wärme soll sein

$$R' \overline{C^2}.$$

Was zunächst den Widerstand der Leitung anbelangt, so lässt sich mit Hülfe des Poynting'schen Satzes der Nachweis führen, dass scheinbarer und effectiver Widerstand identisch sind. Aus der ersten der Gleichungen (1) folgt

$$(9) \quad E_{z1} \cdot C = R_1 C^2 + \frac{1}{2} L_{11} \frac{\partial C^2}{\partial t}.$$

$4\pi C$  ist, da  $C$  in absolutem elektromagnetischem Maasse gemessen wurde, dem Linienintegrale  $\int ds H_s$  der magnetischen Kraft gleich, das über die Randcurve  $s$  des Querschnittes des ersten Drahtes zu erstrecken ist. Demgemäss schreiben wir (9):

$$(9a) \quad \frac{1}{4\pi} \int ds E_{z1} \cdot H_s = R_1 C^2 + \frac{1}{2} L_{11} \frac{\partial C^2}{\partial t}.$$

Die linke Seite giebt die auf die Längeneinheit bezogene Energiemenge an, die in der Zeiteinheit in den ersten Draht hineinströmt. Da nach einer ganzen Schwingung die magnetische Energie des Drahtinnern zu ihrem ursprünglichen Werte zurückgekehrt ist, so ist die in den Draht während dieser Zeit hineingeströmte Energie vollständig in Joule'sche Wärme verwandelt worden. Mithin ist  $R_1' \overline{C^2}$  der zeitliche Mittelwert der linken Seite von (9a); andererseits ist  $R_1 \overline{C^2}$  der zeitliche Mittelwert der rechten Seite für die Zeit einer Schwingung. Mithin folgt

$$R_1' = R_1,$$

und entsprechend

$$R_2' = R_2,$$

daher nach (3a)

$$(10) \quad R' = R_1' + R_2' = R.$$



*Scheinbarer und effectiver Widerstand sind identisch.* Auch die Identität der scheinbaren und effectiven inneren Selbstinduction wäre durch geeignete Interpretation der Gleichung (9a) zu beweisen; doch werden wir diese Identität weiter unten (§ 4) in directerer Weise erkennen.

Wir wenden ferner den Poynting'schen Satz auf ein Gebiet im Isolator an, dessen Begrenzung erstens durch zwei benachbarte, durch die Parameter  $z$  und  $(z + dz)$  gekennzeichnete, auf den Drahtaxen senkrechte Ebenen, zweitens durch die Drahtoberflächen und drittens durch einen, das ganze System einschliessenden Kreiscylinder von unendlich grosser Basis gebildet wird. Der über eine Schwingung erstreckte zeitliche Mittelwert der Energieströmung muss gleich Null sein, da nach einer Schwingung die Feldenergie des Gebietes sich nicht geändert hat. Die mittlere Energieströmung durch den zweiten Teil der Begrenzung beträgt, nach dem soeben Bewiesenen,  $R \overline{C^2} dz$ . Durch den dritten Teil der Begrenzung strömt — das ist eine Grundbedingung des Problems der Drahtwellen — keine Energie herein oder heraus. Die  $z$ -Komponente des Poynting'schen Strahlvectors sei

$$(11) \quad S_z = \frac{1}{4\pi} (E_x H_y - E_y H_x).$$

Alsdann folgt aus dem Verschwinden der mittleren Energieströmung durch die Begrenzung des Gebietes hindurch

$$(11a) \quad \frac{\partial}{\partial z} \iint \overline{S_z} dx dy + R \overline{C^2} = 0.$$

Um den Ausdruck (11a) auf eine andere Form zu bringen, müssen wir auf die Grundgleichungen des Feldes zurückgehen. Dieselben ergeben, mit Rücksicht auf das Fehlen einer longitudinalen Componente  $H_z$  (vgl. § 1):

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{e}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ \frac{e}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}. \end{cases}$$

Da die Abhängigkeit sämtlicher Feldgrössen von  $t, z$  durch den Factor

$$e^{2\pi i \left( \frac{t}{T} - qz \right)}$$

bestimmt ist, so bestehen zwischen den complexen Ausdrücken der Componenten die Relationen

$$(12a) \quad \begin{cases} \frac{\epsilon}{c^2} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot E_x = q H_y, \\ \frac{\epsilon}{c^2} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot E_y = -q H_x, \quad q = \frac{2\pi}{\omega \tau} - \kappa i. \end{cases}$$

Bei der Berechnung des über eine Schwingung erstreckten zeitlichen Mittelwertes von (11) hat man nur den mit  $H_y$  gleichphasigen Teil von  $E_x$ , und den mit  $H_x$  gleichphasigen Teil von  $E_y$  zu berücksichtigen, also zu setzen

$$\overline{S_z} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\omega \tau} \cdot \frac{c^2 \cdot \tau}{\epsilon \cdot 2\pi} (\overline{H_x^2} + \overline{H_y^2}) = \frac{2c^2}{\omega \epsilon} \cdot \frac{1}{8\pi} (\overline{H_x^2} + \overline{H_y^2}).$$

Da nun die auf den Isolator entfallende mittlere magnetische Energie der Längeneinheit der Leitung beträgt

$$\frac{1}{2} L_a' \overline{C^2} = \overline{W_{ma}} = \iint dx dy \frac{\mu_a}{8\pi} (\overline{H_x^2} + \overline{H_y^2}),$$

so wird

$$(12b) \quad \iint \overline{S_z} dx dy = \frac{c^2}{\omega \epsilon \mu_a} \cdot L_a' \overline{C^2}.$$

Nun war  $\kappa$  die räumliche Dämpfung der Stromamplitude, mithin  $2\kappa$  diejenige des Quadrates der Stromamplitude. Mithin ergibt (11a):

$$- \frac{2\kappa c^2}{\omega \epsilon \mu_a} \cdot L_a' \overline{C^2} + R \overline{C^2} = 0,$$

oder

$$(13) \quad R = \frac{2\kappa c^2}{\omega \epsilon \mu_a} \cdot L_a'.$$

*Diese Relation verknüpft den Widerstand mit der effectiven äusseren Selbstinduction.* Sie wird uns im Folgenden von Nutzen sein, gestattet indessen nicht, den allgemeinen Zusammenhang der Werte von scheinbarer und effectiver Capacität und Selbstinduction zu erkennen. Um dieses Problem zu erledigen, müssen wir einen zweiten, dem Poynting'schen analogen Satz der Elektrodynamik heranziehen.

### § 3. Beweis eines allgemeinen Satzes über elektrische Schwingungen.

Wir wollen die Betrachtungen zunächst etwas allgemeiner halten, als es für die Anwendung auf Drahtwellen unbedingt erforderlich wäre. Wir wollen von einem stationären Schwin-

gungszustand in einem Körper reden, der sowohl leitend, wie elektrisch und magnetisch polarisierbar ist. Für das Feld der Schwingungen gelten bei Zugrundelegung absoluten elektromagnetischen Maasses die Differentialgleichungen<sup>1)</sup>:

$$(14) \quad \frac{e}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\lambda E = \text{curl } H,$$

$$(14a) \quad \text{div } E = 0;$$

$$(15) \quad -\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \text{curl } E,$$

$$(15a) \quad \text{div } H = 0.$$

Wir führen das Maxwell'sche Vectorpotential  $A$  ein, welches definirt ist durch die Gleichungen

$$(16) \quad \mu H = \text{curl } A,$$

$$(16a) \quad \text{div } A = 0.$$

Mit Rücksicht auf (14a), (15) folgt, dass zwischen der elektrischen Kraft und dem Vector  $A$  die Relation besteht:

$$(16b) \quad E = - \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Wir stellen nun dem Poynting'schen Strahlvector

$$S = \frac{1}{4\pi} [EH]$$

einen neuen Vector  $T$  gegenüber, der definirt ist durch

$$(17) \quad T = \frac{1}{4\pi} [AH].$$

Der neue Vector  $T$  ist das mit  $1/4\pi$  multiplicirte äussere (vectorielle) Product aus Vectorpotential und magnetischer Kraft.

Für die Divergenz des äusseren Productes zweier Vektoren gilt die Formel (19') des erwähnten Encyklopädieartikels<sup>2)</sup>:

$$\text{div } [AH] = H \text{ curl } A - A \text{ curl } H.$$

1) Ueber die hier benutzten Symbole der Vectoranalysis findet man Näheres in dem vom Verfasser herrührenden Artikel 4. 14 der Encyklopädie der mathem. Wissensch. Für die ausserordentliche Vereinfachung, welche gerade in der Elektrodynamik die Verwendung der Vektorenrechnung mit sich bringt, mag dieser Paragraph als Beleg dienen.

2) M. Abraham, Mathem. Encykl. 4. 14. p. 20. 1901.

Mit Rücksicht auf diese Rechnungsregel und die Gleichungen (14), (16) erhält man

$$(17a) \quad \operatorname{div} T = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mu H^2 - A \left( \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \lambda E \right) \right\}.$$

Wir integrieren diese Gleichung über einen Raum  $w$ , der von einer Fläche  $o$  eingeschlossen ist. Infolge der Definition der Divergenz eines Vectors<sup>1)</sup> wird die linke Seite

$$\iiint d w \operatorname{div} T = \iint d o T_r,$$

wo  $T_r$  die Componente des Vectors  $T$  in Richtung der äusseren Normalen der Fläche  $o$  bezeichnet. Mithin wird

$$(18) \quad \iint d o T_r = \frac{1}{4\pi} \iiint d w \mu H^2 - \frac{1}{4\pi} \iiint d w A \left( \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \lambda E \right).$$

Nun bilden wir zeitliche Mittelwerte, erstreckt über die Zeit  $\tau$  einer Schwingung. Die zeitlichen Mittelwerte der magnetischen und elektrischen Energie des Raumes  $w$  sind

$$\overline{W_m} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} d t \iiint d w \frac{\mu H^2}{8\pi},$$

$$\overline{W_e} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} d t \iiint d w \frac{\varepsilon E^2}{8\pi c^2}.$$

Mithin ist für den Mittelwert des ersten Gliedes der rechten Seite von (18)  $2 \overline{W_m}$  zu setzen. Bei der Berechnung des Mittelwertes des zweiten Gliedes hat man, mit Rücksicht auf (16b), zu setzen

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} d t \cdot A \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \{ A E \}_t^{t+\tau} + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} d t \cdot E^2,$$

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} d t \cdot A E = - \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{1}{2} A^2 \right\}_t^{t+\tau}.$$

1) M. Abraham, l. c. p. 12.

Da die Feldgrößen zu den Zeiten  $t$  und  $t + \tau$  dieselben Werte besitzen, so hat man

$$\frac{1}{4\pi} \iiint d\omega \frac{e}{c^2} A \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iiint d\omega \frac{e}{c^2} E^2 = 2 \overline{W}_e,$$

$$\frac{1}{4\pi} \iiint d\omega 4\pi \lambda A E = 0.$$

Demnach erhält man schliesslich

$$(19) \quad \overline{W}_m - \overline{W}_e = \frac{1}{2} \iint d\sigma \overline{T}_n.$$

Wir können das Resultat in den Satz zusammenfassen:  
Bei einem stationären elektromagnetischen Schwingungsvorgang in einem homogenen isotropen Körper wird die Differenz der zeitlichen Mittelwerte der magnetischen und elektrischen Energie durch das halbe, über die Begrenzungsfläche erstreckte Integral der Normalcomponente unseres Vectors  $T$  angegeben.

Auch wenn das Feld von verschiedenen homogenen, isotropen Körpern erfüllt ist, die Leiter, Halbleiter oder Isolatoren sein können, behält dieser Satz seine Gültigkeit. Die Normalcomponente des Vectors  $T$  durchsetzt nämlich stetig die Trennungsfläche verschiedener Körper; denn weder die Tangentialcomponenten der elektrischen, noch diejenigen der magnetischen Kraft werden längs derartiger Trennungsflächen unstetig. Aus der Stetigkeit der Tangentialcomponenten der elektrischen Kraft  $E$  der Schwingungen folgt aber, nach (16b), die Stetigkeit der Tangentialcomponenten des Vectorpotentials  $A$ , und Stetigkeit der Tangentialcomponenten von  $A$  und  $H$  bedingt, nach (17), Stetigkeit der Normalcomponenten des Vectors  $T$ . Ebenso wie der Poynting'sche Satz gilt auch der durch (19) formulierte, wenn die Fläche  $\sigma$  verschiedene homogene, isotrope Körper einschliesst.

Die erste Anwendung unseres Satzes soll sich auf den Fall beziehen, wo das Feld von Isolatoren erfüllt und von vollkommen leitenden Wänden begrenzt ist. An der Begrenzung verschwindet die tangentielle elektrische Kraft der Schwingungen, mithin nach (16b) auch die Tangentialcomponente des Vectorpotentials. Daher ist  $T_n = 0$ , und man erhält aus (19):

$$\overline{W}_m = \overline{W}_e.$$

*Bei stationären elektromagnetischen Schwingungen in einem allseitig von vollkommen spiegelnden Wänden begrenzten Raume sind die zeitlichen Mittelwerte der magnetischen und elektrischen Energie für eine ganze Schwingung einander gleich.*

Wenn nur ein Teil der Begrenzung des Feldes vollkommen spiegelt, während durch andere Teile derselben ebene homogene Wellen herein und heraus laufen, so verliert dieses Resultat seine Gültigkeit nicht. Bei ebenen homogenen elektromagnetischen Wellen ist nämlich die elektrische Kraft senkrecht zur magnetischen orientirt, und mit ihr in gleicher Phase. Das Vectorpotential  $A$  besitzt nach (16b) einen Phasenvorsprung von  $\pi/2$  vor der elektrischen und somit auch vor der magnetischen Kraft. Daher ist der über eine Schwingung erstreckte zeitliche Mittelwert des Vectors  $T$  bei ebenen homogenen Wellen gleich Null. Daraus folgt in der That:

*Bei stationären elektromagnetischen Schwingungen in einem Felde, das teilweise von vollkommen reflectirenden Wänden begrenzt ist, während durch die anderen Teile der Begrenzung ebene homogene Wellen Energie ab- und zuführen, ist die mittlere magnetische Energie der mittleren elektrischen gleich.*

Bei Drahtwellen liegen die Verhältnisse complicirter; weder sind die Drähte als vollkommen leitend, noch sind die Wellen als homogen anzusehen. Hier ist eine besondere Betrachtung notwendig.

#### § 4. Anwendung auf Drahtwellen.

Wir wenden den neuen Satz auf ein Stück des ersten Drahtes, von der Länge 1, an, um die Identität der „scheinbaren“ inneren Selbstinduction desselben ( $L_{11}$ ) mit der „effectiven“ ( $L'_{11}$ ) zu beweisen. Diese Betrachtung geht ganz parallel der in § 2 auf Grund des Poynting'schen Satzes durchgeführten. Die Gleichung (1) nimmt durch Einführung des Vectorpotentials nach (16b) die Form an

$$-\frac{\partial A_{11}}{\partial t} = R_1 C + L_{11} \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Die Integration nach der Zeit, Multiplication mit  $(\frac{1}{2}C)$  und Mittelwerthbildung für die Zeit einer ganzen Schwingung ergibt, da  $\int C dt$  und  $C$  die Phasendifferenz ( $\pi/2$ ) besitzen:

$$-\frac{1}{2} \overline{A_{11} C} = \frac{L_{11}}{2} \cdot \overline{C^2}.$$



Hier ist also das Glied mit  $R_1$  herausgefallen, während aus der Formel (9) bei der Mittelwerthbildung das Glied mit  $L_{11}$  herausfiel. Die linke Seite ist mit Hülfe der Relation  $4\pi C = \int ds H_s$ , mit Rücksicht auf (17), zu schreiben

$$(20) \quad \frac{1}{2} \int ds \overline{T}_v = \frac{L_{11}}{2} \overline{C}^2.$$

$T_v$  bedeutet dabei die Componente des Vectors  $T$  in Richtung der äusseren Normalen der Drahtoberfläche. Die Anwendung unseres Satzes (19) auf das Drahtinnere ergibt, da dielektrische Verschiebung und mithin elektrische Energie im Drahtinnern nicht angenommen wird:

$$\frac{1}{2} \int ds \overline{T}_v = \frac{1}{2} L'_{11} \overline{C}^2.$$

Es folgt also

$$L'_{11} = L_{11}.$$

Die analoge Ueberlegung ergibt für den zweiten Draht

$$L'_{22} = L_{22},$$

daher ist nach (3b)

$$(21) \quad L'_i = L'_{i1} + L'_{i2} = L_i.$$

*Effective und scheinbare innere Selbstinduction sind in der That identisch.*

Bei dieser Betrachtung wurden, ebenso wie bei der analogen des § 2, die auf die Grundflächen des aus dem Drahte herausgeschnittenen Cylinders bezüglichen Teile der Flächenintegrale fortgelassen. Durch eine besondere, diese Terme berücksichtigende Rechnung habe ich mich davon überzeugt, dass diese Terme zu vernachlässigen sind in allen den Fällen, in denen es erlaubt ist,  $R_1$  und  $L_{11}$  aus der Gleichung (1a) zu entnehmen. Diese Relation wurde nämlich von Lord Rayleigh und J. Stefan abgeleitet auf Grund der Voraussetzung, dass die äussere elektrische Kraft sich längs des Drahtes nicht verändert. Nun ist zwar bei Hertz'schen Schwingungen diese Annahme keineswegs erfüllt; die tangentielle elektrische Kraft wechselt periodisch beim Fortschreiten längs des Drahtes. Indessen ist die Correction, die hierdurch in die Werte von  $R_1$  und  $L_{11}$  hereinkommt, so geringfügig, dass sie in allen mir bekannten Arbeiten vernachlässigt wird, und von derselben

Grössenordnung sind die von den erwähnten Termen herührenden Correctionen der Werte von  $R'_1$  und  $L'_1$ .

Ferner wenden wir den Satz (19) an auf ein Gebiet des Isolators, dessen Begrenzung erstens von zwei auf den Drahtaxen senkrechten, durch die Parameter  $z$  und  $(z + dz)$  gekennzeichneten Ebenen, zweitens durch die Drahtoberflächen und drittens durch einen, das ganze System einschliessenden Kreiscylinder von unendlicher Basis gebildet wird. Für den zweiten Teil der Begrenzung gilt, gemäss dem soeben Bewiesenen, da  $v$  jetzt die nach dem Drahtinnern weisende Normale bezeichnet

$$\frac{1}{2} \iint \bar{T}_v d\sigma = -L_i \frac{\bar{C}^2}{2} \cdot dz.$$

In unendlicher Entfernung werden die Feldcomponenten in der Weise Null, dass der dritte Teil der Begrenzung keinen Beitrag zu dem Flächenintegral liefert. Somit ergibt der Satz (19):

$$(22) \quad \overline{W_{ma}} - \overline{W_e} = -\frac{L_i}{2} \bar{C}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \iint dx dy \bar{T}_z.$$

Hierbei ist nach (17) zu setzen:

$$(22a) \quad \bar{T}_z = \frac{1}{4\pi} (\overline{A_x H_y} - \overline{A_y H_x}).$$

Führt man mit Hülfe von (16b) das Vectorpotential  $A$  in die Grundgleichungen (12) ein, so erhält man

$$(23) \quad \begin{cases} -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = +\frac{\partial H_x}{\partial z}. \end{cases}$$

Da die Abhängigkeit der complexen Ausdrücke der Feldgrösse von  $t$  und  $z$  durch den Factor

$$e^{2\pi i \frac{t}{\tau} - qiz}$$

bestimmt sind, so gelten für diese Ausdrücke die Relationen

$$(24a) \quad \begin{cases} \left( \frac{\epsilon}{c^2} \cdot \left( \frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \right) A_x = q i H_y, \\ \left( \frac{\epsilon}{c^2} \cdot \left( \frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \right) A_y = -q i H_x, \quad q = \frac{2\pi}{\omega \tau} - \alpha i. \end{cases}$$

In die auf der rechten Seite von (22a) stehenden zeitlichen Mittelwerte geht nur der mit  $H_y$  gleichphasige Teil

von  $A_x$ , sowie der mit  $H_x$  gleichphasige Teil von  $A_y$  ein. Demgemäss wird

$$\bar{T}_s = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\kappa c^2}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 (\bar{H}_x^2 + \bar{H}_y^2) = \frac{2\kappa c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\mu_a}{8\pi} (\bar{H}_x^2 + \bar{H}_y^2),$$

und somit

$$\iint \bar{T}_s dx dy = \frac{2\kappa c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \cdot \iint dx dy \frac{\mu_a}{8\pi} (\bar{H}_x^2 + \bar{H}_y^2).$$

Da nun die magnetische Energie des Drahtäusseren pro Längeneinheit der Leitung beträgt

$$\frac{1}{2} L_a' \bar{C}^2 = \bar{W}_{ma} = \iint dx dy \frac{\mu_a}{8\pi} (\bar{H}_x^2 + \bar{H}_y^2),$$

und die räumliche Dämpfung von  $\bar{C}^2$  durch  $2\kappa$  gegeben wird, so ergibt (22)

$$(24) \quad \frac{1}{2} L_a' \bar{C}^2 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{Q} = -\frac{L_l \bar{C}^2}{2} - \frac{2\kappa^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{L_a'}{2} \cdot \bar{C}^2.$$

Um  $e^2$ ,  $\bar{C}^2$  zu eliminieren, hat man die Beziehung zu benutzen

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau},$$

aus der folgt:

$$\bar{e}^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = |q^2| \bar{C}^2.$$

Durch Einführung derselben erhält man

$$(25) \quad |q^2| = Q' (L_a' + L_l) \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\kappa^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot Q' L_a'.$$

Diese Relation ist es, die sich durch Anwendung des Satzes (19) auf das Drahtäussere ergibt. Zusammen mit der Relation (13), die sich in entsprechender Weise aus dem Poynting'schen Satze ergab, liefert sie zwei Gleichungen zur Bestimmung der für die magnetische und elektrische Energie des Drahtäusseren maassgebenden Wert der effektiven äusseren Selbstinduction ( $L_a'$ ) und der effektiven Capacität ( $Q'$ ). Beide Relationen gelten nicht nur für zwei Paralleldrähte, sondern für eine beliebige, durch gerade Drähte oder coaxiale Cylinder gebildete Leitung, immer unter Voraussetzung symmetrischer

**Stromverteilung.** Kennt man für die betreffende Leitung die Werte von  $R$ ,  $L_i$ ,  $L_a$  und  $Q$ , mithin nach (5) auch denjenigen von

$$q = \frac{2\pi}{\omega \tau} - \kappa i,$$

so kann man  $L'_a$ ,  $Q'$  aus jenen beiden Relationen berechnen. Unser Satz (19) erledigt also im Verein mit dem Poynting'schen allgemein die Frage nach der Energie elektrischer Drahtwellen. Wir wollen am Beispiele der beiden Paralleldrähte die hier vorliegenden Verhältnisse genauer discutiren.

#### § 5. Effective Capacität und effective äussere Selbstinduction.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der complexen Grösse

$$q = \frac{2\pi}{\omega \tau} - \kappa i$$

schreiben wir die Relationen (25) und (13):

$$(26) \quad \left(\frac{2\pi}{\omega \tau}\right)^2 + \kappa^2 = Q' (L'_a + L_i) \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\kappa^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot Q' L'_a,$$

$$(27) \quad \frac{2\kappa}{\omega} = \frac{\varepsilon \mu_a}{c^2} \cdot \frac{R}{L'_a}.$$

Diese Relationen verknüpfen effective Capacität ( $Q'$ ) und effective äussere Selbstinduction ( $L'_a$ ) mit Widerstand ( $R$ ), innerer Selbstinduction ( $L_i$ ), Fortpflanzungsgeschwindigkeit ( $\omega$ ) und räumlicher Dämpfung ( $\kappa$ ) der Schwingungen.

Diesen Gleichungen gegenüber stellen wir die complexe Gleichung (5) des § 1, die  $\omega$ ,  $\kappa$  durch die aus Spannung und Gesamtinduction definirten Werte der „scheinbaren“ Capacität ( $Q$ ) und „scheinbaren“ äusseren Selbstinduction ( $L_a$ ) ausdrückt:

$$(28) \quad \left(\frac{2\pi}{\omega \tau}\right)^2 - \kappa^2 - \frac{4\pi \kappa i}{\omega \tau} = Q (L_a + L_i) \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{2\pi i}{\tau} \cdot Q R.$$

Wir beabsichtigen,  $\omega$  und  $\kappa$  aus diesen Gleichungen zu eliminiren, um direct die Werte der scheinbaren und effectiven Capacität und äusseren Selbstinduction in Verbindung zu bringen. Hierbei sind die Fälle fehlender und mitwirkender dielektrischer Rückleitung gesondert zu behandeln.

Wird die Rückleitung ausschliesslich durch den Leitungsstrom besorgt, so nehmen, wie in § 1 erwähnt, die Grössen

$Q$  und  $L_a$  reelle Werte an. Demgemäss spaltet sich die Gleichung (28) durch Trennung des reellen und imaginären Theiles in die beiden folgenden:

$$(29) \quad \left(\frac{2\pi}{\omega r}\right)^2 - x^2 = Q(L_a + L_t) \cdot \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2,$$

$$(30) \quad \frac{2x}{\omega} = Q R.$$

Aus (27), (30) folgt zunächst

$$(31) \quad Q L_a' = \frac{\epsilon \mu_a}{c^2};$$

andererseits war nach (6b), (6c):

$$Q L_a = \frac{\epsilon \mu_a}{c^2}.$$

Hieraus schliessen wir

$$(32) \quad L_a' = L_a.$$

Mit Rücksicht auf (31), (32) ergibt die Subtraction der Gleichungen (26), (29)

$$0 = (Q' - Q) \left\{ (L_a + L_t) \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 + \frac{2x^2}{Q} \right\}.$$

Da der Factor, mit dem  $(Q' - Q)$  hier multiplicirt erscheint, positiv ist, so folgt

$$(33) \quad Q' = Q.$$

Wir gelangen also zu dem Resultate:

*Wenn die Rückleitung ausschliesslich durch Leitungsstrom erfolgt und mithin die Werte von scheinbarer Capacität und scheinbarer äusserer Selbstinduction reell sind, so sind diese mit den aus der Feldenergie definirten Werten der effectiveen Capacität und effectiveen äusseren Selbstinduction identisch.*

Nun werde der allgemeine Fall untersucht, dass dielektrische Rückleitung in Betracht zu ziehen ist. Dann bestimmen sich  $Q$  und  $L_a$  aus den Gleichungen (8a), (8b).  $\zeta = r \cdot e^{q i}$  ist hier eine complexe Grösse, deren Werte für ein bestimmtes Beispiel in der Tabelle des § 1 angeführt sind; der Winkel  $q$  ergibt sich durch Multiplication der dort in Graden ausgedrückten Winkel mit  $2\pi/360$ . Man könnte zu der Vermutung geneigt sein, dass hier der zeitliche Mittelwert der elektrischen Energie für eine Schwingung durch den zeitlichen

Mittelwert des Productes aus Spannung und Ladung, derjenige der magnetischen durch den zeitlichen Mittelwert des Productes aus Stromstärke und Gesamtinduction gegeben werde. Dann hätte man

$$\overline{W_{ma}} = \frac{\overline{C^2}}{2} \cdot R_e(L_a), \quad \overline{W_e} = \frac{\overline{e^2}}{2} \cdot R_e\left(\frac{1}{Q}\right);$$

vernachlässigt man zweite und höhere Potenzen des Phasenwinkels  $\varphi$ , so wären für die reellen Teile  $R_e(L_a)$ ,  $R_e(1/Q)$  die absoluten Beträge  $|L_a|$ ,  $|1/Q|$  zu setzen. Es wäre also

$$\overline{W_{ma}} = |L_a| \frac{\overline{C^2}}{2}, \quad \overline{W_e} = \frac{\overline{e^2}}{2|Q|},$$

was für effective äussere Selbstinduction und Capacität zu den Gleichungen führen würde:

$$L_a' = |L_a| = 4\mu_a r, \quad Q' = |Q| = \frac{\varepsilon}{4c^2 r}.$$

Wir werden indessen sehen, dass die Vermutung, die zu diesen Beziehungen führt, nicht richtig ist. Die Differenzen

$$L_a' - |L_a|, \quad \frac{1}{Q'} - \frac{1}{|Q|}$$

ergeben sich vielmehr von der Ordnung des Phasenwinkels  $\varphi$  selbst.

Durch Einführung der Werte

$$(34) \quad L_a = 4\mu_a r \cdot e^{i\varphi}, \quad Q = \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot e^{-i\varphi}$$

in (28) gelangt man zu der complexen Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{\omega r}\right)^2 - x^2 - \frac{4\pi x i}{\omega r} &= \frac{\varepsilon \mu_a}{c^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 + L_i \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 \\ &\quad - \frac{2\pi i}{r} \cdot \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot e^{-i\varphi} \cdot R, \end{aligned}$$

die in folgende beiden reellen Gleichungen zu spalten ist:

$$(35) \quad \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{\omega r}\right)^2 - x^2 = \frac{\varepsilon \mu_a}{c^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \\ \quad \cdot \left\{ \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 L_i \cos \varphi - \frac{2\pi}{r} \cdot R \cdot \sin \varphi \right\} \\ \frac{2x}{\omega} = \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot \left\{ R \cos \varphi + \frac{2\pi}{r} \cdot L_i \sin \varphi \right\}. \end{cases}$$



Da der Phasenwinkel  $\varphi$ , wie die Tabelle des § 1 lehrt, in der Regel sehr klein ist, so können wir uns mit der Berücksichtigung der ersten Potenz dieses Winkels begnügen, also für (35) schreiben:

$$(36) \quad \left(\frac{2\pi}{\omega \tau}\right)^2 - x^2 = \frac{\epsilon \mu_a}{c^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{\epsilon}{4c^2 r} \cdot \left\{ \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 L_i - \frac{2\pi}{\tau} \cdot R \cdot \varphi \right\},$$

$$(37) \quad \frac{2x}{\omega} = \frac{\epsilon}{4c^2 r} \left\{ R + \frac{2\pi}{\tau} \cdot L_i \cdot \varphi \right\}.$$

Die Gleichungen (36), (37) sind jetzt mit (26), (27) zu combiniren, um nach Elimination von  $\omega$  und  $x$ ,  $Q'$  und  $L_a'$  durch  $r$  und  $\varphi$  auszudrücken. Aus (27), (37) folgt

$$(38) \quad \frac{4\mu_a r}{L_a'} = 1 + \psi,$$

wenn zur Abkürzung

$$(38a) \quad \psi = \varphi \cdot \frac{2\pi L_i}{\tau R}$$

gesetzt wird.

Der Factor von  $\varphi$  in (38a) ist, wie wir sehen werden, wenig von 1 verschieden. Berücksichtigen wir daher consequenterweise nur erste Potenzen von  $\psi$ , so erhalten wir

$$(39) \quad L_a' = 4\mu_a r (1 - \psi) = |L_a| (1 - \psi).$$

*Der Wert der effectiven äusseren Selbstinduction ist immer etwas kleiner als der absolute Betrag der scheinbaren äusseren Selbstinduction.*

Etwas complicirter gestaltet sich die Beziehung zwischen  $Q'$  und  $|Q|$ . Um diese abzuleiten, schreiben wir (26)

$$(40) \quad \frac{1}{Q'} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\omega \tau}\right)^2 + x^2 \right\} = (L_a' + L_i) \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2x^2 c^2}{\epsilon \mu_a} \cdot L_a',$$

und (36)

$$(40a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4c^2 r}{\epsilon} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\omega \tau}\right)^2 + x^2 \right\} &= (4\mu_a r + L_i) \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{2\pi}{\tau} \cdot R \cdot \varphi \\ &+ 2x^2 \cdot \frac{4c^2 r}{\epsilon}, \end{aligned} \right.$$

und erhalten durch Subtraction

$$\begin{aligned} \left( \frac{4c^2 r}{\epsilon} - \frac{1}{Q'} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{2\pi}{\omega \tau}\right)^2 + x^2 \right\} &= (4\mu_a r - L_a') \cdot \left\{ \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2x^2 c^2}{\epsilon \mu_a} \right\} \\ &- \frac{2\pi}{\tau} \cdot R \cdot \varphi, \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (39)

$$(40b) \left\{ \left( \frac{4c^3 r}{\varepsilon} - \frac{1}{Q'} \right) \cdot \left( \left( \frac{2\pi}{\omega r} \right)^2 + x^2 \right) = 4\mu_a r \cdot \psi \left( \left( \frac{2\pi}{r} \right)^2 + \frac{2x^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \right) - \frac{2\pi}{r} \cdot R \cdot \varphi \right.$$

Da

$$\frac{4c^3 r}{\varepsilon} = \frac{1}{|Q|},$$

so ergibt die Division von (40b) durch (40a)

$$(41) \left\{ \left( \frac{1}{|Q|} - \frac{1}{Q'} \right) : \frac{1}{|Q|} = \left\{ 4\mu_a r \cdot \psi \left( \left( \frac{2\pi}{r} \right)^2 + \frac{2x^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \right) - \frac{2\pi}{r} \cdot R \cdot \varphi \right\} : \left\{ 4\mu_a r \left( \left( \frac{2\pi}{r} \right)^2 + \frac{2x^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \right) - \frac{2\pi}{r} \cdot R \cdot \varphi + L_i \cdot \left( \frac{2\pi}{r} \right)^2 \right\} \right.$$

Dieses ist die (bei Berücksichtigung erster Potenzen von  $\varphi, \psi$ ) genaue Gleichung. Praktisch kann man indessen in normalen Fällen  $L_i$ , ebenso wie  $R \cdot \tau / 2\pi$  gegen  $4\mu_a r = |L_a|$  streichen, und erhält dann

$$(42) \quad \frac{1}{Q'} = \frac{1}{|Q|} (1 - \psi) = \frac{4c^3 r}{\varepsilon} (1 - \psi).$$

Die reciproke effective Capacität ist immer etwas kleiner als der reciproke absolute Betrag der scheinbaren Capacität.

Bei Hertz'schen Schwingungen ist die Stromconcentration in der Regel so stark, dass man mit den Rayleigh'schen Werten (1b) von Widerstand und innerer Selbstinduction zu rechnen hat. Dann ergibt (38a)  $\psi = \varphi$ , und demnach (39) und (42)

$$(43) \quad L_a' = |L_a| (1 - \varphi),$$

$$(44) \quad \frac{1}{Q'} = \frac{1}{|Q|} (1 - \varphi).$$

Kennt man die complexen Werte der scheinbaren äusseren Selbstinduction und Capacität, so kann man mit Hülfe der Gleichungen (43), (44) sofort die effective äussere Selbstinduction und die effective Capacität berechnen.

Wir sind nunmehr im stande, die Tabelle des § 1 durch folgende Tabelle zu ergänzen:

$2d$	$4r =  L_a $	$L_a'$
40	30,33	30,3
400	37,60	36,6
1200	38,26	36,7
$\infty$	38,24	36,6

Die zweite Columnne giebt den absoluten Betrag der scheinbaren äusseren Selbstinduction, die dritte die effective Selbstinduction für den betreffenden Abstand ( $2d$ ) der Drähte an. Die Zahlen der dritten Columnne mit  $\bar{C}^2/2$  multiplicirt, ergeben, unserer Definition gemäss, die magnetische Energie des Drahtäusseren pro Längeneinheit der Leitung. Man sieht, dass die Energie nicht sehr stark mit der Entfernung der Drähte variirt. Insbesondere ist die Energie bereits von einer Entfernung von 4 m an merklich mit derjenigen zweier Einzeldrähte vom gleichen Material identisch, die so weit voneinander entfernt sind, dass sie sich nicht mehr beeinflussen, und dass die Energien ihrer Felder sich einfach superponiren; für das Feld jedes dieser Einzeldrähte würde sich die mittlere magnetische Energie pro Längeneinheit zu  $18,3 \cdot \bar{C}^2/2$  berechnen. Entsprechendes gilt für die elektrische Energie. *Wie aus (43), (44) folgt, ergeben sich elektrische bez. magnetische Energie im Verhältnis  $(1 - \varphi) : 1$  kleiner als die zeitlichen Mittelwerte der Producte von Ladung und Spannung ( $e^2/2|Q|$ ) bez. von Strom und Gesamtinduction ( $|L_a|/2 \cdot \bar{C}^2$ ).*

Göttingen, Juli 1901.

(Eingegangen 11. Juli 1901.)

## 2. Untersuchungen über Platinwiderstände und Petrolätherthermometer; von L. Holborn.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Nachdem für die Reichsanstalt ein Linde'scher Apparat für Luftverflüssigung angeschafft war, ist die Untersuchung von Petrolätherthermometern wieder aufgenommen, die von Hrn. Kohlrausch bei Gelegenheit von Versuchen im Linde'schen Laboratorium zu München angegeben wurden.<sup>1)</sup> Da ich Platinwiderstände, die an das Wasserstoffthermometer angeschlossen waren, als Normalthermometer benutzte, so bot sich auch die Gelegenheit, die früher von W. Wien und mir ausgeführte elektrische Messung tiefer Temperaturen<sup>2)</sup> fortzusetzen.

An der Untersuchung beteiligte sich bis zu seinem Abgang von der Reichsanstalt Herr Day; später nacheinander die Herren Dittenberger und Grüneisen.

### 1. Vergleichung von Platinwiderständen mit dem Wasserstoffthermometer.

Es sind im ganzen drei verschiedene Platindrähte zu Widerständen benutzt worden. Der erste Draht (Widerstand Nr. 0) von 0,1 mm Stärke, von Heräus (Hanau) bezogen, war bifilar auf ein Glimmerkreuz (60 mm lang) gewickelt, das sich am Boden eines dünnwandigen Glasrohres (250 mm lang und 16 mm weit) befand. Die Zuleitungen bestanden aus 0,5 mm dicken Kupferdrähten, die mit Zinn an die Platinenden gelötet waren und ausserhalb des Glasrohres kupferne Klemmen trugen.

Die beiden folgenden Widerstände (Nr. 1 und 2) waren fertig gewickelt von der Cambridge Scientific Instrument Company bezogen. Die Zuführungen aus Platin waren ohne fremdes

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **60**. p. 1. 1897.

2) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. **59**. p. 213. 1896.

Lot mit den Widerstandsdrähten verschmolzen. Als Schutz dienten 7 mm - weite Porzellanrohre.

Die Widerstände Nr. 3, 4 und 5, die später angefertigt wurden, sind aus einer dritten Drahtsorte (von Heräus) hergestellt. Sie wurden in ähnlicher Weise montirt wie die englischen Widerstände, nur wählte man das Glimmerkreuz breiter und die Dicke der Platinzuleitungen geringer. Die Widerstandsdrähte von Nr. 4 und 5 waren 0,2 mm, der von Nr. 3 0,15 mm dick. Sie wurden vor dem Wickeln elektrisch ausgeglüht und nachher mehrere Stunden lang auf 500° erhitzt. Die Schutzröhren bestanden aus Jenaer Glas 59<sup>III</sup>.

Um die Platinwiderstände zu messen, schaltete man sie mit einem Normalwiderstand aus Manganin in denselben Stromkreis und verglich die Spannung mittels eines Compensationsapparates. Zu diesem Zweck besaßen die Platinwiderstände an jedem Ende zwei Zuführungen, von denen das eine Paar den Strom zuleitete, während das andere zur Abnahme des Potentials diente. Der Strom des Hauptkreises, dessen Stärke gewöhnlich nicht über 0,002 Amp. betrug, wurde bei jeder Messung commutirt.

Der kleinste der benutzten Platinwiderstände, der 2,5 Ohm bei 0° betrug, erleidet unter diesen Verhältnissen eine Spannungsänderung von 1 MV, wenn sich die Temperatur um 0,05° ändert. Eine solche Grösse ist bei der gewählten Anordnung noch genau mit einem Siemens'schen Galvanometer nach d'Arsonval zu messen. Für die folgenden Beobachtungen ist meistens ein empfindlicheres astatisches Galvanometer benutzt worden.

Als Gasthermometer mit constantem Volumen diente das früher beschriebene Instrument<sup>1)</sup>, das für den vorliegenden Zweck mit einem Gefäss aus Jenaer Glas 59<sup>III</sup> (Inhalt 156,8 ccm) versehen wurde. Das Verhältniss des Gefässes zum schädlichen Raum betrug 0,00602. Als Messgas diente elektrolytisch erzeugter Wasserstoff, dessen Druck der internationalen Normalscala entsprechend etwa 1 m Quecksilber bei 0° betrug, und zwar bei zwei verschiedenen Füllungen 986,3 und

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 820. 1899.

994,2 mm. Der Ausdehnungscoefficient des Gases wurde zu 0,003665 bestimmt.

Direct mit dem Wasserstoffthermometer verglichen wurden nur die Widerstände Nr. 0, 1 und 2. Die Widerstände Nr. 3, 4 und 5 sind später indirect mit Hülfe der drei ersten Platinthermometer auf die Wasserstoffscala bezogen.

Als Temperaturbad diente einmal flüssige Luft, die sich in einem Glaszylinder mit evacuirter Wandung von 25 cm Höhe und 8 cm Weite befand, während dasselbe Gefäß zur Herstellung des zweiten Temperaturbades mit einem Gemisch von Alkohol und fester Kohlensäure angefüllt wurde.

Wurde die flüssige Luft sogleich benutzt, nachdem sie aus dem Linde'schen Apparat kam, so lag ihre Temperatur unter  $-191^{\circ}$ ; unter diesen Umständen wurde bis zu  $-191,7^{\circ}$  gemessen. Die Temperatur steigt nur langsam an, wenn die flüssige Luft in versilberten Flaschen mit gut evacuirter Wandung aufbewahrt wird; sie erreicht dann am dritten Tag ungefähr  $-187$  bis  $-188^{\circ}$ . Einmal wurde in flüssiger Luft, von der nach sechstägigem Stehen etwa noch  $\frac{1}{4}$  Liter vorhanden war, eine Temperatur von  $-182,7^{\circ}$  gemessen, die dem Siedepunkt des reinen Sauerstoffs entspricht. Aber hier war die Verdampfung durch mehrfaches Umgiessen bei dem vorhergehenden Gebrauch sehr befördert worden.

In dem Beobachtungsgefäß, das wegen der Ablesung der einzutauchenden Petrolätherthermometer nicht versilbert war, fand die Verdampfung schneller statt. Man konnte hier die Temperatur leicht um  $\frac{1}{2}^{\circ}$  ändern, indem man den Inhalt des Gefäßes teilweise verdampfen liess oder frische Flüssigkeit aus dem versilberten Aufbewahrungsgefäß zugoss.

Das zweite Temperaturbad, zu dem Schnee von käuflicher Kohlensäure und stets frischer absoluter Alkohol genommen wurde, zeigte sich bei Verwendung des Dewar'schen Gefäßes sehr constant, wenn Kohlensäureschnee stets hinreichend nachgefüllt wurde. Auch die Unterschiede der an verschiedenen Tagen angesetzten Bäder betrugen nur einige Hundertstel Grad, wenn man die Abhängigkeit vom Barometerstande berücksichtigt.

Die folgende Zusammenstellung enthält die Temperaturen  $t$ , die bei dem Barometerstande  $B$  (auf  $0^{\circ}$  reducirt) mit dem

Wasserstoffthermometer beobachtet wurden;  $t_n$  sind die auf normalen Druck umgerechneten Werte, deren Mittel  $-78,34^\circ$  beträgt. Am zweiten Beobachtungstage wurde das Gefäss des Thermometers zuerst in trockenen Schnee eingeführt, der eine um  $0,10^\circ$  tiefere Temperatur als das Gemisch mit Alkohol ergab. Bei den Thermometer-Vergleichungen ist stets der grösseren Genauigkeit halber das Gemisch aus Alkohol und Schnee verwendet worden. Dabei blieb das Gefäss oben offen, sodass nach Bedarf Kohlensäure nachgefüllt werden konnte.

1899	$t$	$B$	$t_n$
2. November	$-78,33^\circ$	759,2 mm	$-78,31^\circ$
4. „	$-78,44$	756,2	$-78,36$
14. December	$-78,60$	747,4	$-78,35$
23. „	$-78,20$	767,0	$-78,34$

Tab. 1 enthält die Vergleichen der Platinthermometer Nr. 0, 1 und 2 mit dem Wasserstoffthermometer.  $W$  bedeutet den beobachteten Wert der Widerstände, und zwar gilt hierbei der Vergleichswiderstand aus Manganin von 4,987 Ohm als Einheit.  $t$  bezeichnet die mit dem Wasserstoffthermometer bestimmte Temperatur. Am Fusse der Tabelle sind die Werte der Widerstände für 0 und  $100^\circ$ , sowie die mittleren Temperaturcoefficienten zwischen diesen Grenzen angegeben. Nach den Formeln

$$(0) \quad W = W_0 (1 + 0,003824 t - 0,000000862 t^2),$$

$$(1) \quad W = W_0 (1 + 0,003890 t - 0,000001013 t^2),$$

$$(2) \quad W = W_0 (1 + 0,003889 t - 0,000001003 t^2)$$

sind rückwärts Zahlen für  $t$  berechnet. Ihre Differenzen gegen die beobachteten Werte von  $t$  lassen die Grösse der Beobachtungsfehler bei der Temperatur der flüssigen Luft erkennen.

In Tab. 2 gebe ich in ähnlicher Anordnung die Daten für die Widerstände Nr. 3, 4 und 5. Die Werte von  $t$  sind hier aus der Vergleichung mit den Platinthermometern Nr. 1 und 2 gewonnen, und zwar wurde am ersten Beobachtungstage Nr. 1, an den beiden anderen Nr. 2 für die Vergleichung benutzt. Aus den beobachteten Werten von  $W$  sind rück-

Tabelle 1.

1899	Nr. 0			Nr. 1			Nr. 2		
	<i>W</i>	<i>t</i>	<i>t</i> beob.-ber.	<i>W</i>	<i>t</i>	<i>t</i> beob.-ber.	<i>W</i>	<i>t</i>	<i>t</i> beob.-ber.
20. Decbr.	1,0642	- 189,20°	+ 0,01°	0,11520	- 190,90°	- 0,02°	0,23416	- 190,15°	+ 0,05°
	1,0709	- 188,85	0,00	0,11568	- 190,68	- 0,01	0,23587	- 189,75	+ 0,07
	1,0780	- 188,49	- 0,04	—	—	—	—	—	—
	1,0584	- 189,56	- 0,02	0,11664	- 190,24	0,00	0,23274	- 190,63	- 0,11
22. "	1,0721	- 188,72	+ 0,05	0,11765	- 189,78	+ 0,01	0,23353	- 190,38	+ 0,03
	3,0147	- 78,18	0,00	0,36034	- 78,19	- 0,01	0,72088	- 78,26	- 0,02
	3,0145	- 78,19	0,00	0,36029	- 78,18	+ 0,02	0,72083	- 78,21	+ 0,03
<i>W</i> <sub>0</sub>	4,3330	—	—	0,52250	—	—	1,04539	—	—
<i>W</i> <sub>100</sub>	5,9761	—	—	0,72426	—	—	1,44876	—	—
<i>α</i>	0,003792	—	—	0,003864	—	—	0,003859	—	—

Tabelle 2.

1901	Nr. 3			Nr. 4			Nr. 5		
	<i>W</i>	<i>t</i>	<i>t</i> beob.-ber.	<i>W</i>	<i>t</i>	<i>t</i> beob.-ber.	<i>W</i>	<i>t</i>	<i>t</i> beob.-ber.
12. Jan.	0,45576	- 186,71°	0,00°	0,26144	- 187,16°	+ 0,02°	0,26357	- 187,58°	+ 0,05°
15. "	0,41882	- 191,04	- 0,01	0,24523	- 190,89	- 0,01	0,24816	- 190,71	0,00°
18. Febr.	1,3519	- 78,41	- 0,01	0,78180	- 78,60	- 0,01	0,79586	- 78,38	+ 0,07
<i>W</i> <sub>0</sub>	1,9722	—	—	1,14178	—	—	1,16113	—	—
<i>W</i> <sub>100</sub>	2,7431	—	—	1,58736	—	—	1,61509	—	—
<i>α</i>	0,003809	—	—	0,003808	—	—	0,003810	—	—



wärts die Temperaturen für alle drei Widerstände nach der Formel

$$(3, 4, 5) \quad W = W_0(1 + 0,003934t - 0,000000988t^2)$$

berechnet. Innerhalb der Beobachtungsgrenze gilt dieselbe Formel für die aus demselben Draht hergestellten Thermometer.

Was die Haltbarkeit der Widerstände anbetrifft, so sind nie merkliche Aenderungen beobachtet, mit Ausnahme von Widerstand Nr. 1, der später bei  $0^\circ$  den Wert 0,52239 hatte, also um etwa  $\frac{1}{5000}$  abgenommen hatte.

## 2. Vergleichung des Stickstoffthermometers mit dem Wasserstoffthermometer.

Bei der früheren mit W. Wien ausgeführten Messung tiefer Temperaturen war der Unterschied zwischen dem Luft- und dem Wasserstoffthermometer bei der Temperatur der flüssigen Luft gemessen worden.<sup>1)</sup> Es hatte sich ergeben, dass das erstere um  $0,6s^\circ$  tiefer zeigt, wenn der Druck bei  $0^\circ$  ungefähr eine Atmosphäre beträgt.

Diese Vergleichung ist mit dem genaueren Luftthermometer wiederholt, das mir jetzt zur Verfügung stand. Dabei sind die Bedingungen etwas abgeändert: statt Luft wurde Stickstoff und als Anfangsdruck der Druck der Normalscala von 1 m Quecksilber gewählt. Im übrigen ist die Bestimmung in derselben Weise wie früher durchgeführt, d. h. es wurden die auf die Wasserstoffscala bezogenen Platinwiderstände mit dem Stickstoffthermometer in flüssiger Luft verglichen.

Bei dem Versuch, der im Januar 1900 mit den Widerständen Nr. 0, 1 und 2 angestellt wurde, betrug der Druck des Stickstoffthermometers 1002,8 mm bei  $0^\circ$ ; für den Ausdehnungskoeffizienten der aus Ammoniumnitrit bereiteten Gasfüllung ergab sich der Wert 0,003677.

Tab. 3 enthält die Ergebnisse, nach denen das Stickstoffthermometer bei  $-190^\circ$  um  $0,50^\circ \pm 0,06^\circ$  tiefer zeigt als das Wasserstoffthermometer.

1) L. Holborn u. W. Wien, l. c. p. 227.

Tabelle 3.

$W$	$t_H$ ber.	$t_N$ beob.	$t_H - t_N$
Nr. 0			
1,0513	- 189,98°	- 190,43°	0,50°
1,0669	- 189,07	- 189,70	0,63
Nr. 1			
0,11490	- 191,02	- 191,51	0,49
0,11530	- 190,84	- 191,31	0,47
0,11615	- 190,46	- 190,92	0,46
Nr. 2			
0,23335	- 190,38	- 190,83	0,45
0,23568	- 189,85	- 190,36	0,51

### 3. Vergleichung von Platinthermometern mit dem Stickstoffthermometer bei höherer Temperatur.

Extrapolirt man die oben angegebenen Formeln für die Platinwiderstände, die durch die Messungen bei 0°, -78° und -190° bestimmt sind, über 0° hinaus nach oben, so weichen sie von den beobachteten Werten ab. Bei +100° beträgt der Unterschied schon über 2°. Nun ist von Callendar zuerst bewiesen, dass die Aenderung des Platinwiderstandes mit der Temperatur von 0° bis über 500° durch eine parabolische Gleichung mit grosser Annäherung ausgedrückt werden kann. Um zu prüfen, bis zu welchem Grade diese Darstellung bei tiefen Temperaturen mit der Beobachtung übereinstimmt, habe ich zwei Platinthermometer (Nr. 1 und 4) zwischen 300 und 500° an mehreren Punkten mit dem Stickstoffthermometer verglichen. Es wurde diese Vergleichung dem Callendar'schen Verfahren vorgezogen, nach dem die Coefficienten der Gleichung zweiten Grades durch die Beobachtung bei 0°, 100° und dem Siedepunkt des Schwefels (445°) bestimmt werden, weil die Angaben verschiedener Beobachter für den letzten Punkt noch um 0,7° schwanken.

Das Gefäss des Gasthermometers wurde mit Stickstoff gefüllt, dessen Druck 473,23 mm bei 0° betrug. Der Ausdehnungscoefficient des Gases wurde zu 0,003667, bestimmt, während für die Ausdehnung des Gefässes in höherer Tem-

peratur die anderweitig mitgeteilten Ergebnisse für Jenaer Glas 59<sup>III</sup> benutzt wurden.<sup>1)</sup>

Als Temperaturbad diente der elektrisch geheizte Salpeterkessel, der früher schon ähnlichen Zwecken gedient hat.<sup>2)</sup>

Die Beobachtungen an zwei Tagen sind in Tabelle 4 u. 5 zusammengestellt.

Tabelle 4.

$$\text{Nr. 1. } t - t_P = 1,515 \left\{ \left( \frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right\}.$$

1901	$t$ beob.	$W$	$t_P$	$t$ ber.	$t$ beob.-ber.
10. April	412,23°	1,3148	392,52°	412,06°	+ 0,17°
	412,56	1,3157	393,00	412,54	+ 0,02
	481,12	1,4370	453,05	481,24	- 0,12
	299,13	1,1077	289,93	298,96	+ 0,17
11. "	298,45	1,1063 <sub>2</sub>	289,29	298,26	+ 0,19
	347,94	1,1984	334,86	347,93	+ 0,01
	471,86	1,4215	445,38	471,96	- 0,10
	472,93	1,4235	446,37	473,09	- 0,16
	- 78,18°	0,36032	- 80,28°	- 78,17°	- 0,01°
	- 190,40	0,11629	- 201,17	- 192,79	+ 2,39

Tabelle 5.

$$\text{Nr. 4. } t - t_P = 1,489 \left\{ \left( \frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right\}.$$

1901	$t$ beob.	$W$	$t_P$	$t$ ber.	$t$ beob.-ber.
10. April	412,34°	2,8963	393,23°	412,41°	- 0,07°
	412,74	2,8979	393,57	412,79	- 0,05
	480,83	3,1651	453,47	480,71	+ 0,12
	298,79	2,4354	289,93	298,77	+ 0,02
11. "	298,45	2,4338	289,57	298,39	+ 0,06
	346,29	2,6301	333,56	346,26	+ 0,03
	348,48	2,6391	335,58	348,48	0,00
	472,23	3,1322	446,10	472,30	- 0,07
	472,55	3,1324	446,14	472,32	+ 0,23
	- 78,60°	0,78180	- 80,68°	- 78,59°	- 0,01°
	- 190,94	0,24323	- 201,40	- 193,13	+ 2,19

1) L. Holborn u. E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 6. p. 136. 1901.

2) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 517. 1900.

Es bedeutet hier  $t$  die mit dem Stickstoffthermometer gemessene Temperatur und  $W$  den beobachteten Wert des Widerstandes. Aus  $W$  ist zunächst die Platintemperatur  $t_P$  berechnet, die nach Callendar durch die Gleichung

$$t_P = 100 \frac{W - W_0}{W_{100} - W_0}$$

definiert ist. Unter der Voraussetzung, dass der Platinwiderstand nach einer Parabel verläuft, hängt die Platinscala  $t_P$  mit der Stickstoffscala  $t$  durch eine Beziehung von der Form

$$t - t_P = \delta \left\{ \left( \frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right\}$$

zusammen. Nachdem passende Werte für die Constante  $\delta$  aus den Beobachtungen der beiden Widerstände ermittelt waren, ist hiernach  $t$  aus  $t_P$  berechnet und mit den am Gasthermometer beobachteten Werten von  $t$  verglichen. Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung zeigen keinen systematischen Gang, ihr mittlerer Wert beträgt 0,14 bez. 0,11°.

Die Platinwiderstände, welche Chappuis und Harker<sup>1)</sup> mit dem Stickstoffthermometer bis 580° verglichen haben, stammen aus derselben Bezugsquelle wie der Widerstand Nr. 1. Aus den Angaben, welche jene Beobachter für ihren Widerstand  $K_8$  für 0 und 100° machen, folgt, dass der Temperaturcoefficient  $\alpha$  für  $K_8$  und Nr. 1 fast identisch ist (0,0038640 und 0,0038644). Darf man hieraus schliessen, dass dasselbe Platin für beide Thermometer verwendet worden ist, so ergibt sich, dass die von Chappuis und Harker aufgestellte Stickstoffscala bei 445° um etwa 0,45° höher liegt als die vorliegende. Denn jene Forscher fanden für  $\delta$  den Wert 1,538, während ich diese Grösse zu 1,515 bestimmt habe. Dieser Unterschied wird wahrscheinlich dadurch erklärt, dass Chappuis und Harker die Ausdehnung des von ihnen benutzten Gasthermometergefässes nur unter 100° gemessen und durch Extrapolation auf höhere Temperatur einen zu grossen Wert für den Ausdehnungscoefficienten erhalten

1) P. Chappuis u. J. A. Harker, Trav. et Mém. du Bureau internat. 12. p. 1. 1900.

haben.<sup>1)</sup> Nach der von Callendar aufgestellten Thermometerscala, die sich auf ein Gasthermometer mit constantem Druck bezieht, ist für dasselbe Platin  $\delta = 1,50$ , d. h. diese Scala liegt bei  $445^{\circ}$  um  $0,7^{\circ}$  tiefer als die von Chappuis und Harker.

Für den Widerstand Nr. 4 ergab sich  $\delta = 1,489$ . Dieser kleinere Wert entspricht dem grösseren Wert von  $\alpha$  (Tabelle 2), da im allgemeinen mit der Zunahme von  $\alpha$  eine Abnahme von  $\delta$  beobachtet wird. Beurteilt man die Reinheit des Platins nach dem Temperaturcoefficienten  $\alpha$ , so ist ein so reines Platin, wie das der Widerstände Nr. 3, 4 und 5 meines Wissens bisher noch nicht beobachtet. Dabei ist hervorzuheben, dass der Widerstandsdraht stark ausgeglüht war.

Schreibt man die Gleichungen, welche für die Widerstände Nr. 1 und 4 zwischen 0 und  $500^{\circ}$  gelten, in der gewöhnlichen Form, so erhält man

$$(1a) \quad W = W_0 (1 + 0,003923 t - 0,000000585 t^2),$$

$$(4a) \quad W = W_0 (1 + 0,003966 t - 0,000000582 t^2).$$

Es ist  $W = 0$  für

$$t = -247,7^{\circ} \text{ nach (0);}$$

$$t = -241,6^{\circ} \text{ nach (1);} \quad t = -245,9^{\circ} \text{ nach (1a);}$$

$$t = -239,8^{\circ} \text{ nach (4);} \quad t = -253,5^{\circ} \text{ nach (4a).}$$

Für das Platinthermometer  $K_8$  von Chappuis und Harker gilt die Formel

$$(K_8) \quad W = W_0 (1 + 0,003922 t - 0,000000585 t^2),$$

wenn man  $\delta = 1,515$  setzt. Es ist hier wie bei Nr. 1  $W = 0$  für  $t = -245,9^{\circ}$ .<sup>2)</sup>

Die Widerstände erreichen nach den beiden Arten von Formeln (1) und (4), sowie (1a) und (4a) schon lange vor dem absoluten Nullpunkt den Wert Null. Die Parabel, die für

1) Vgl. auch L. Holborn u. E. Grüneisen, l. c.

2) In der Scala von Chappuis und Harker lautet die Gleichung

$$(K_4) \quad W = W_0 (1 + 0,0039235 t - 0,0000005944 t^2).$$

Es ist  $W = 0$  für  $t = -247,1^{\circ}$ . Vgl. hierüber auch den Rapport von Chappuis, wo jedoch für den letzten Wert irrthümlicherweise  $-265,56^{\circ}$  angegeben ist.

höhere Temperaturen aufgestellt ist, stimmt noch mit der Beobachtung bei  $-78^{\circ}$  (Tabelle 4 u. 5) überein, weicht aber bei  $-190^{\circ}$  um mehr als  $2^{\circ}$  ab. Vielleicht beginnt diese Abweichung erst unter  $-100^{\circ}$ , wo auch die thermoelektrische Kraft des Platins einen Umkehrpunkt hat, und es wäre alsdann erst unter  $-100^{\circ}$  eine andere Formel zu benutzen. Die zuerst aufgestellten Gleichungen (1) und (4) würden hier zu gebrauchen sein; ob sie aber dieselbe Genauigkeit geben, wie die Formeln (1a) und (4a) in dem höher liegenden Bereich, kann nur die Beobachtung entscheiden. Unter  $-200^{\circ}$  bieten die Platinthermometer gar keinen Anhalt für die absolute Temperaturmessung, wie aus den Versuchen von Dewar<sup>1)</sup> über den Siedepunkt des Wasserstoffs folgt. An diesem Punkte beträgt der Unterschied zwischen dem Platin- und dem Wasserstoffthermometer  $14^{\circ}$ . Zwischen 0 und  $-190^{\circ}$  liegt bisher meines Wissens nur eine ausgedehnte Vergleichung eines Platinwiderstandes mit dem Wasserstoffthermometer vor, die von W. Wien und mir herrührt. Sie beweist, dass der Unterschied zwischen den beiden Thermometern (das Platinthermometer nach der durch  $0^{\circ}$ ,  $-78^{\circ}$  und  $-190^{\circ}$  bestimmten Formel berechnet) in dem ganzen Intervall kleiner als  $1^{\circ}$  ist.<sup>2)</sup>

1) J. Dewar, Proc. of R. Institution, Januar 1899.

2) H. Dickson (Phil. Mag. (5) 44. p. 445. 1897) hat für den untersuchten Platinwiderstand die Formel

$$(W + 293,28615)^2 = 119,49237(t + 976,8586)$$

berechnet, deren mittlere Abweichung von den beobachteten Werten  $\pm 0,25^{\circ}$  beträgt.

Die Einwände, welche Callendar (Phil. Mag. (5) 47. p. 191. 1899) gegen unsere Messungen wegen der veränderlichen Temperatur der Versuchsanordnung und der unsymmetrischen Form des Wasserstoffthermometer-Gefäßes erhoben hat, treffen nicht zu. Die Temperatur stieg nur sehr langsam und war an einzelnen Punkten, z. B. bei dem Schmelzpunkt des Aethers, trotz kräftigen Rührens eine Stunde lang innerhalb eines Grades constant. Dabei wurde die Anordnung des Thermometergefäßes, in dem sich der Platinwiderstand befand, bei jeder Versuchsreihe abgeändert. Auch sind zwei Gefäße von verschiedener Form benutzt worden; das eine hatte die in Fig. 1 (L. Holborn u. W. Wien, l. c. p. 215) dargestellte Form, während sich bei dem anderen der Fortsatz zur Einführung der Platindrähte oben befand. Die Messungen mit beiden Gefäßen haben keine systematischen Unterschiede gezeigt.

## 4. Siedepunkt von Sauerstoff.

Um in tiefer Temperatur die Platinthermometer jeder Zeit ohne das Gasthermometer auf ihre Constanz prüfen zu können, wurde der Siedepunkt des Sauerstoffs bestimmt. Für diese Messung ist der Widerstand Nr. 2 benutzt worden.

Das Gas wurde aus Kaliumchlorat unter Zusatz von etwas Braunstein hergestellt. Es strömte aus dem Entwicklungsgefäß durch eine mit verdünnter Kalilauge gefüllte Waschflasche und eine mit Chlorcalcium gefüllte Röhre und wurde darauf in einem 2 cm weiten und 25 cm langen Glasrohr condensirt, das in flüssige Luft tauchte. Anfangs war noch eine Kühlschlange aus Glas in dem Bade von flüssiger Luft vorgesehen; es genügt jedoch bei nicht zu stürmischer Entwicklung ein dünnes gerades Rohr (*r*) (vgl. Figur).

Das Condensationsrohr (*k*) ist von einem weiteren und längeren Glaszylinder (*g*) umgeben, der als Dampfmantel bei dem eigentlichen Siedeversuch dient, wenn das Ganze aus der flüssigen Luft herausgenommen ist. Alsdann taucht der Widerstand in den siedenden Sauerstoff, dessen Dämpfe durch die Löcher *o* nach unten entweichen. Das Röhrchen *r* ist dabei durch einen Kork verschlossen. Für jeden Versuch wurde so viel Kaliumchlorat in einen gläsernen Kochkolben gefüllt, dass das Condensationsrohr etwa bis zu  $\frac{3}{4}$  seiner Höhe mit flüssigen Sauerstoff gefüllt werden konnte. Ein Zusatz von zu viel Braunstein ist zu vermeiden, weil sonst Chlor entsteht, das leicht mitgerissen wird und sich im festen Zustande in dem Siederohr ausscheidet.

Nachdem der flüssige Sauerstoff einige Minuten aus dem Bade von flüssiger Luft herausgezogen war, kam er in ein

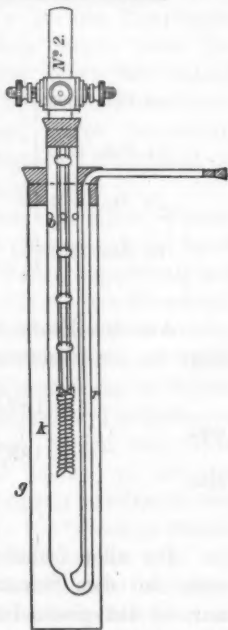


Fig. 2.  
 $\frac{2}{3}$  nat. Grösse.

ruhiges Sieden, und die Temperatur wurde besonders dann sehr constant, wenn die Flüssigkeit so weit verdampft war, dass sich der Widerstand fast vollständig in den Dämpfen befand.

Tabelle 6.

Siedepunkt von Sauerstoff.

	<i>W</i> Nr. 2	<i>t</i>	Druck (mm)
13. Febr. 1900 {	0,26445	- 183,40°	751,06
	0,26602	- 183,05	751,65
14. Febr. 1900 {	0,26601	- 183,05	747,59
	0,26673	- 182,94	747,72
12. Jan. 1901 {	0,26786	- 182,64	768,86
	0,26846	- 182,50	769,56
16. Jan. 1901 {	0,26842	- 182,51	767,31
	0,26840	- 182,52	767,76

Aus den Beobachtungen, die in Tabelle 6 enthalten sind, folgt für die Siedetemperatur *t*

und                    - 182,54° bei 768,37 mm Druck  
also                    - 183,10° bei 749,51 mm Druck,  
                             - 182,79° bei 760,00 mm Druck.

Bei allen früheren Messungen ist der Widerstand Nr. 2 stets mit dem Schutzrohr aus Porzellan verbunden gewesen, nur in den siedenden Sauerstoff ist er wegen der geringen Menge der Flüssigkeit nackt eingetaucht. Die Correction, welche deshalb an der angegebenen Siedetemperatur anzu- bringen ist, ergab sich in der Weise, dass der Widerstand Nr. 2 einmal mit, das andere Mal ohne Schutzrohr mit Nr. 1 in flüssiger Luft verglichen wurde. Hiernach ist der obige Wert um 0,08° zu vergrössern, sodass endgültig für den Siedepunkt

- 182,7°

folgt.



Dewar<sup>1)</sup> giebt  $-182,5^{\circ}$  als wahrscheinlichsten Wert an. Er erhielt mit zwei verschiedenen Wasserstoffthermometern für den Siedepunkt die Temperaturen

$-182,20$   $-182,67$  und  $-181,20^{\circ}$ .

### 5. Petrolätherthermometer.

Da der Petroläther als Thermometerflüssigkeit den Nachteil hat, keine einheitliche Substanz zu sein, so wurde zuerst nach einem anderen Stoffe gesucht, der bei der Temperatur der flüssigen Luft flüssig bleibt. Doch haben diese Bestrebungen keinen Erfolg gehabt, und wir haben uns deshalb darauf beschränken müssen, aus dem käuflichen Petroläther, dessen Siedepunkt bei etwa  $33^{\circ}$  liegt, durch fractionirte Destillation eine Flüssigkeit mit niedrigerem Siedepunkt zu gewinnen, die in der flüssigen Luft weniger zähe ist.

Der zu destillirende Petroläther wurde in einem Wasserbade auf  $25-30^{\circ}$  erwärmt. Die Dämpfe gingen zunächst durch ein senkrechtes Glasrohr, das an einigen Stellen kugelförmig aufgeblasen war und Drahtnetze enthielt, über denen sich die weniger flüchtigen Bestandteile schon bei Zimmertemperatur condensirten und allmählich zurückflossen. Die übergelassenen Dämpfe wurden in einer Flasche, die von einer Kältemischung von Schnee und Kochsalz umgeben war, über Phosphorpentoxyd aufgefangen.

Wenn auch das Destillat mit dem Sinken des Siedepunktes in flüssiger Luft beweglicher bleibt, so ist doch andererseits ein zu niedriger Siedepunkt nicht erwünscht, weil sich dann bei längerer Abkühlung auf  $-190^{\circ}$  flockige Niederschläge im Thermometergefäß bilden. Dies erklärt sich wohl daher, dass das niedriger siedende Destillat eine einfachere Zusammensetzung besitzt und deshalb leichter gefriert, als das Gemisch vieler Verbindungen. Unter  $20^{\circ}$  ist man deshalb mit dem Siedepunkt nicht herabgegangen.

Diese Grenze ist auch darum inne zu halten, weil mit dem Sinken des Siedepunktes die Schwierigkeit der Aufbewahrung und der Erhaltung der unveränderlichen Zusammensetzung wächst, von der die Ausdehnung und damit die Uebereinstimmung der zu verschiedenen Zeiten hergestellten Thermometer in hohem Grade

1) J. Dewar, Proc. of R. Soc. 68. 44. 1901.

abhängt. Die Aufbewahrungsflaschen waren mit Schliff und Quecksilberverschluss versehen, der eine etwa 10 cm hohe Quecksilbersäule fassen konnte, sodass erst bei einem gewissen Ueberdruck Gase aus dem Innern entweichen konnten.

Diese Vorrichtung bewährte sich gut. Am sichersten verfährt man jedoch bei der Anfertigung einer grösseren Anzahl von Thermometern, wenn man sie alle gleichzeitig mit einem Petroläther füllt, dessen Ausdehnung unmittelbar vorher bestimmt worden ist. Selbstverständlich erleichtert man sich die Arbeit sehr, wenn sie in der kühleren Jahreszeit vorgenommen wird.

Für die Messung der Ausdehnung wurde das Gefäss und die Capillare eines Thermometers mit Quecksilber ausgewogen und mit Petroläther gefüllt. Dies Probethermometer, dessen Stiel eine gleichmässige Teilung erhielt, verglich man alsdann bei  $-78^{\circ}$  und  $-190^{\circ}$  mit einem Platinwiderstande. Weil es zunächst hauptsächlich darauf ankam, die günstigsten Bedingungen für die tiefste Temperatur zu ermitteln, habe ich mich auf diese beiden Punkte beschränkt und die Ausdehnung durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt. Im Vergleich zu der Genauigkeit, welche die Thermometer überhaupt in tiefster Temperatur gewähren, ist diese Darstellung hinreichend. Für genauere Messungen bei etwas höherer Temperatur muss die Abweichung, welche diese Scala gegen das Wasserstoffthermometer etwa aufweist, besonders bestimmt werden.

Es ist mehrfach Petroläther destillirt worden. Alle Lieferungen der Ausgangsflüssigkeit stammten aus derselben Bezugsquelle (Kahlbaum, Berlin). Da sich die verschiedenen Destillate in ihrer Ausdehnung um einige Procent unterscheiden, so genügt es, hier nur die Formel für ein Destillat als Beispiel anzugeben:

$$V = V_0(1 + 0,00146t + 0,00000160t^2).$$

Der Petroläther mit dem Siedepunkt von  $20^{\circ}$  hat hiernach noch eine etwas grössere und ungleichmässigere Ausdehnung als der bei  $33^{\circ}$  siedende.<sup>1)</sup>

Es wurden nur Stabthermometer angefertigt, die man zunächst mit Quecksilber auswog und dann ungleichmässig nach der Ausdehnungsformel in ganze Grade teilte. Die Länge

1) Vgl. F. Kohlrausch, Wied. Ann. 60. p. 3. 1897.

eines Grades ist bei  $-80^{\circ}$  um etwa 18 Proc. und bei  $-190^{\circ}$  um etwa 43 Proc. kleiner als bei  $0^{\circ}$ . Vor dem Füllen wurden die Rohre evacuirt, damit der Petroläther möglichst wasserfrei eintritt. Denn die an der Luft gefüllten Thermometer zeigten wahrscheinlich infolge von Wassergehalt bei  $-190^{\circ}$  starke Trübungen. Ich habe deshalb auch grosse Aufmerksamkeit auf die trockene Aufbewahrung des Petroläthers verwandt und zu diesem Zweck über der Oberfläche der Flüssigkeit im Aufbewahrungsgefäss ein Röhrchen mit Phosphorpentoxyd angebracht. Eine ganz geringe Trübung der Kuppe bei  $-190^{\circ}$  liess sich jedoch nicht vermeiden.<sup>1)</sup>

Wegen des Abdestillirens von Petroläther wird die Thermometercapillare, die man 1—2 mm weit wählt, an ihrer Spitze birnenförmig erweitert. Auch empfiehlt es sich, die Gefässe bei dem endgültigen Zuschmelzen in feste Kohlensäure zu bringen, damit eine Luftsäule von grösserem Druck auf der Kuppe ruht.

Das Eintauchen der Thermometer in ein Bad von flüssiger Luft erfordert besondere Vorsicht, wenn man auf  $1^{\circ}$  sicher messen will. Es darf zunächst nur das Gefäss abgekühlt werden, damit der Petroläther in der Capillare beweglich genug bleibt und nicht zu sehr an der Wandung adhärirt. Erst wenn die Kuppe schon fast den tiefsten Stand erreicht hat, taucht man die Capillare beliebig weit ein.

Beindet sich das Thermometer längere Zeit (etwa  $\frac{1}{4}^h$ ) in flüssiger Luft, deren Temperatur allmählich zu steigen beginnt, so folgt die Kuppe zwar nach, aber doch in ungleichmässiger Weise. Sie adhärirt mehr oder weniger an der Wandung, wird deshalb zunächst flacher und oft zuletzt ganz unregelmässig. Man muss alsdann das Thermometer ganz herausziehen und nachdem man sich überzeugt hat, dass der Flüssigkeitsfaden bei dem Erwärmen nicht gerissen ist, es von neuem eintauchen.

Tab. 7 enthält als Beispiel die Correctionen zweier Petrolthermometer, die an verschiedenen Tagen mit dem Wasserstoff- oder dem Platinthermometer besonders lange Zeit nach der Einführung in das Bad verglichen wurden;  $\tau$  und  $\tau'$  bezeichnen

1) Die untersuchten Thermometer wurden von dem Glasbläser C. Richter (Berlin) mit grosser Sorgfalt angefertigt. Zur bessern Vermeidung der Parallaxe ist jeder zehnte Teilstrich ganz um das Rohr herumgezogen.

die Angaben der Petrolthermometer,  $t$  die Temperatur in der Wasserstoffscala. Die Unregelmässigkeit der Kuppe ist durch einen \* ausgedrückt. Bei  $-78^{\circ}$  fallen alle Schwierigkeiten wegen der Kuppenbildung fort, selbst wenn man die Petrolthermometer viel schneller abkühlt, als es z. B. ein Weingeistthermometer verträgt. Auch bei  $-190^{\circ}$  bleiben die Abweichungen, einschliesslich der \* durch schlechte Kuppenbildung markirten Fälle, kleiner als  $\pm 1^{\circ}$ .

Tabelle 7.  
Petrolätherthermometer.

Zeit		$t$	Nr. 12 $\tau$	$t - \tau$	Nr. 14 $\tau'$	$t - \tau'$
12. Decbr.	6 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	-191,7 <sup>o</sup>	-190,1 <sup>o</sup>	-1,6 <sup>o</sup>	-193,1 <sup>o</sup>	+1,4 <sup>*</sup>
	7 10	-191,3	-189,9	-1,4	-192,9 <sup>*</sup>	+1,6
	7 47	-191,1	-189,7	-1,4	-192,9 <sup>*</sup>	+1,8
14. "	10 15	-190,2	-188,6	-1,6	-192,0	+1,8
	10 35	-189,9	-188,3	-1,6	-192,0	+2,1
	11 20	-189,6	-188,3	-1,3	-191,9	+2,3
	11 55	-189,0	-188,0 <sup>*</sup>	-1,0	-191,8 <sup>*</sup>	+2,8
	12 30	-188,4	-187,0 <sup>*</sup>	-1,4	-189,9 <sup>*</sup>	+1,5
	1 55	- 78,6	- 78,0	-0,6	- 79,9	+1,3
	2 5	- 78,6	- 78,0	-0,6	- 79,9	+1,3
20. "	2 30	- 78,5	- 77,9	-0,6	- 79,8	+1,3
	6 30	-190,9	-189,6	-1,3	-192,9	+2,0
	6 45	-190,7	-189,3	-1,4	-193,0 <sup>*</sup>	+2,3
	7 3	-190,1	-188,7	-1,4	-192,3 <sup>*</sup>	+2,2
22. "	7 20	-189,7	-188,2	-1,5	-192,1 <sup>*</sup>	+2,4
	10 5	-190,6	-188,5	-2,1	-192,3	+1,7
	10 20	-190,4	-188,5	-1,9	-192,1	+1,7
23. "	10 45	-190,2	-188,1	-2,1	-192,0	+1,8
	11 45	-189,8	-188,0 <sup>*</sup>	-1,8	-191,6 <sup>*</sup>	+1,8
	10 35	- 78,3	- 77,7	-0,6	- 79,5	+1,2
	10 45	- 78,2	- 77,6	-0,6	- 79,3	+1,1
23. "	10 55	- 78,2	- 77,5	-0,7	- 79,3	+1,1
	11 5	- 78,2	- 77,4	-0,8	- 79,3	+1,1
	11 20	- 78,2	- 77,4	-0,8	- 79,3	+1,1
	11 35	- 78,2	- 77,4	-0,8	- 79,3	+1,1

(Eingegangen 26. Juli 1901.)

**3. Ueber den Einfluss des Luftdruckes  
und der Luftfeuchtigkeit auf die Entladung  
statischer Elektrizität aus Spitzen;  
von Franz Tamm.**

(Nach seiner Inaugural-Dissertation für die Annalen bearbeitet  
vom Verfasser.)

Die Aufgabe, über deren Bearbeitung ich im Folgenden kurz berichten möchte, lautete: Wie hängt die aus einer auf bestimmtes Potential geladenen Spitze in gemessener Zeit ausgestrahlte Elektrizitätsmenge von der Luftfeuchtigkeit und dem Luftdruck ab.

In zwei vor kurzem erschienenen Arbeiten, welche sich mit der Bestimmung der bei Atmosphärendruck aus einer Spitze ausströmenden Elektrizitätsmengen beschäftigen, ist der Versuch gemacht worden, eine Formel aufzustellen, nach welcher sich diese Elektrizitätsmengen berechnen lassen. Hr. Warburg<sup>1)</sup> hat aus seinen Versuchen, bei denen die Spitze auf Potentiale, die zwischen  $\pm 4000$  und  $\pm 10000$  Volt lagen, geladen war und gegen Scheiben im Abstände von 2—7 cm strahlte, die Formel abgeleitet

$$E = c V(V - M),$$

worin  $c$  eine von der Spitze und dem Scheibenabstand abhängige Constante,  $V$  das Spitzenpotential und  $M$  das Minimumpotential bedeuten.

Hr. Sieveking<sup>2)</sup> glaubte aus seinen Versuchen schliessen zu müssen, dass für Spitzenpotentiale, die kleiner als  $\pm 5000$  Volt sind, Hrn. Warburg's Formel seine Beobachtungen nicht mehr so gut wiedergiebt, die gefundenen Elektrizitätsmengen sich vielmehr besser nach der Formel

$$E = a(V - M)$$

1) E. Warburg, Wied. Ann. 67. p. 72. 1899.

2) H. Sieveking, Inaug.-Diss. p. 72. Freiburg 1899.

berechnen lassen. Hierin hat  $a$  wiederum die Bedeutung einer von Spitze und Scheibenabstand abhängigen Constante,  $V$  und  $M$  entsprechen  $V$  und  $M$  in der Formel des Hrn. Warburg.

Da die Vermutung nahe lag, dass beide Formeln nach Anbringung einer entsprechenden Correction die Ergebnisse meiner Beobachtungen bei verschiedenen Drucken innerhalb des oben angegebenen Geltungsbereiches wiedergeben könnten, glaubte ich zuerst den Geltungsbereich, welcher beiden Formeln unter denselben Bedingungen zukommt, nochmals genau feststellen zu müssen.

Zu diesem Zwecke unterwarf ich zunächst die beiden Formeln gemeinsame Grösse, das Minimumpotential, das ich der Kürze wegen im Folgenden mit  $M$  bezeichnen will, einer eingehenden Untersuchung.

Auf die Bedeutung des  $M$  hat zuerst Hr. Röntgen<sup>1)</sup> aufmerksam gemacht. Hr. Röntgen machte bei seinen Untersuchungen über die Entladung der Elektrizität in Isolatoren die Beobachtung, dass die Entladung nicht bei jedem Potential stattfindet, sondern dass vielmehr zum Einleiten derselben immer ein ganz bestimmtes Potential erforderlich ist. Wenn jedoch einmal die Entladung vorhanden ist, so kann man das Potential wieder verkleinern, wodurch die Entladung stetig abnimmt und bei einem Potential, das wesentlich kleiner ist als dasjenige, bei welchen die Entladung anfang, wieder vollständig aufhört.

$M$  ist also dasjenige Potential, bei welchem die Entladung aufhört. Es ist die kleinste Spannung, bei welcher gerade noch eine Ueberstrahlung von Spitze zur Scheibe stattfindet, oder, wie Hr. Warburg<sup>2)</sup> sagt, das kleinste Potential, welches einen Strom unterhalten kann.

Hr. Röntgen hat  $M$  in der Weise bestimmt, dass er von einem unter  $M$  liegenden Potential ausgehend letzteres allmählich so lange steigerte, bis das Galvanometer durch einen plötzlichen, verhältnismässig grossen constanten Ausschlag die eingetretene Entladung anzeigte. Nachdem die Entladung eingeleitet war, verringerte er wieder das Potential so lange,

1) W. C. Röntgen, Gött. Nachr. 1878. p. 395.

2) E. Warburg, Wied. Ann. 67. p. 72. 1899.

bis die Entladung vollständig aufhörte. In diesem Augenblick erfolgte die Ablesung des  $M$ .

Es lag die Frage nahe, ob man für  $M$  den gleichen Wert erhält, wenn man von einem weit über  $M$  liegenden Potential abwärts gehend letzteres so lange verringert, bis die Entladung aufhört.

### I. Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung war die folgende (vgl. Fig. 1):

Eine Wimshurst'sche Elektrisirmaschine  $WM$  von 21 cm Scheibendurchmesser wurde durch einen Elektromotor in ent-

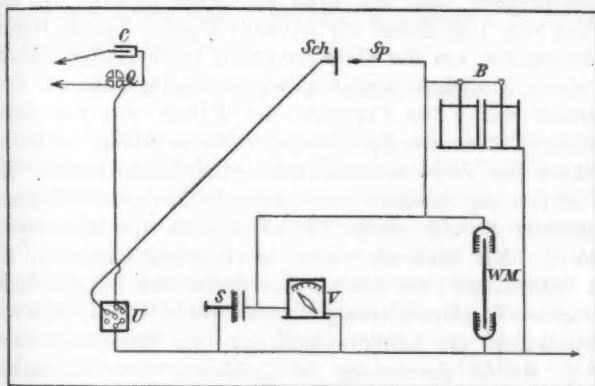


Fig. 1.

sprechend rasche Drehung versetzt. Der eine Pol der Maschine war zur Erde abgeleitet, der andere mit einer Batterie von sieben Leydener Flaschen verbunden. Die äussere Belegung derselben lag an der Erde, die innere war mit einem Siemens'schen elektrostatischen Voltmeter  $V$  und der strahlenden Spitze  $Sp$  verbunden. Der Messbereich des Voltmeters betrug 10000 Volt. Die Spitze bestand aus einem 0,1 mm dicken, 3 mm langen Platindraht, der an einem 5 cm langen Messingstäbchen angelötet war. Der zur Strahlung dienende Teil der Spitze war nach Hrn. Warburg<sup>1)</sup> in der Weise her-

1) E. Warburg, Wied. Ann. 66. p. 653. 1898.



gestellt, dass der Platindraht im Bunsenbrenner zum Glühen gebracht und alsdann durchgerissen wurde. Das Messingstäbchen war mittels Siegelack an einer Schlittenverschiebung mit Mikrometerschraube befestigt und stand centrisch einer gleichfalls mittels Siegelack isolirten, polirten Messingscheibe *Sch* von 12 cm Durchmesser gegenüber. Von der Scheibe aus führte die Leitung zum Umschalter *U*.

Der Körper desselben bestand aus einem viereckigen Paraffinblock, in welchem sechs Vertiefungen zur Aufnahme von Quecksilber eingebohrt waren. Die Anordnung derselben war so getroffen, dass man die übergestrahlten Mengen zur Messeinrichtung oder zur Erde überleiten konnte. Die Zuführung vom Umschalter zur letzteren bestand behufs Herabminderung der von der Flaschenbatterie herrührenden Influenz aus einem einadrigen Bleirohrkabel, dessen Bleihülle zur Erde abgeleitet war. Die Capacität des Kabels war der eingeschalteten Condensatorcapacität gegenüber so gering, dass erstere bei sämtlichen Versuchen unberücksichtigt bleiben konnte. Die Messeinrichtung bestand aus einem Elliot'schen Glimmercondensator *C* und einem Thomson'schen Quadrantelektrometer *Q*. Mit letzterem wurde das Potential gemessen, das dem Condensator von der von der Spitze zur Scheibe übergestrahlten Elektrizitätsmenge erteilt wurde. Die Nadel des Elektrometers war bifilar aufgehängt. Als Dämpfung diente  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , welche gleichzeitig als Zuführung der Nadelladung diente. Die Nadel wurde durch eine Batterie von 100 Zn-Cu- $\text{MgSO}_4$ -Elementen geladen. Als Elektrolyt diente  $\frac{1}{10}$  Normallösung von  $\text{MgSO}_4$ . Jedes Element war mit einer 1 cm hohen Vaseline-Oelschicht bedeckt. Behufs Isolation war die gesamte Batterie in einem Kasten in eine 3 cm hohe Paraffinschicht eingeschmolzen. Die elektromotorische Kraft eines Elementes wurde auf 1,02 Volt festgestellt. Um das Spitzenpotential constant zu erhalten, wurde die von der Maschine gelieferte überschüssige Elektrizitätsmenge durch Saugspitzen *S*, welche kammartig einer mit der Flaschenbatterie verbundenen Scheibe gegenüberstanden und zur Erde abgeleitet waren, abgesaugt. Der Abstand zwischen den Spitzen und der Scheibe konnte beliebig verändert werden.



## II. Das Minimumpotential.

Die Bestimmung des  $M$  erfolgte ohne Condensator, da man auf diese Weise die genauesten Werte erhält. Denn bei einem sehr wenig über dem  $M$  liegenden Potential wird die Elektrometernadel rasch aus dem Gesichtsfeld herausgetrieben, bei einem sehr wenig unter dem  $M$  liegenden Potential bleibt dieselbe in ihrer Ruhelage. Das  $M$  wurde daher der Spannung gleich erachtet, bei welchem die Nadel die langsamste gleichmässige Wanderung, die sich erreichen liess, annahm.

Zunächst bestimmte ich  $M$  in der von Hrn. Röntgen angegebenen Weise, also „aufwärts“ und erhielt z. B. für einen Spitzenabstand von 10 cm:

$$M = -3420 \text{ bez. } +4460 \text{ Volt.}$$

Das Verfahren, auf welche Weise ich diese Werte ermittelt habe, will ich an dem Werte  $-3420$  Volt erläutern.

Bei Beginn des Versuches legte ich das Potential  $-3400$  Volt an die Spitze, hob die Erdverbindung auf und beobachtete die Elektrometernadel. Da dieselbe in Ruhe blieb, steigerte ich durch Rückwärtsdrehen an den Saugspitzen unter fortgesetzter Beobachtung der Elektrometernadel das Spitzenpotential so lange, bis die Nadel anfang, aus ihrer Ruhelage langsam herauszuwandern. Dies war bei  $-3480$  Volt der Fall.

Kaum aber hatte die Nadelwanderung begonnen, so wurde dieselbe stetig rascher, bis die Nadel schliesslich aus dem Gesichtsfeld verschwand. Ich legte die Messeinrichtung an Erde. Alsdann verringerte ich bei ununterbrochener Strahlung der Spitze durch wiederholtes Vorwärtsdrehen an den Saugspitzen das Spitzenpotential unter Aufheben der Erdverbindung und Beobachten der Elektrometernadel so lange, bis ich bei  $-3420$  Volt die langsamste gleichmässige Wanderung erhielt.

Für positive Strahlung erhielt ich die Werte  $+4530$  bez.  $+4460$  Volt.

Die  $M$ -Werte blieben, wie folgende Reihe zeigt, constant, wenn die Spitze bei  $-3420$  Volt ununterbrochen weiterstrahlte. Die Elektrometernadel wurde von 2 zu 2 Minuten beobachtet und nach jeder Beobachtung wieder an Erde gelegt.

0'	2'	4'	6'	8'	10'
- 3420	3420	3420	3420	3420	3420 Volt
+ 4460	4460	4460	4460	4460	4460 „

Bei  $-3410$  bez.  $+4450$  Volt war die Wanderung der Elektrometernadel eine stossweise, was auf eine zeitweise Unterbrechung des Stromes hindeutete; bei  $-3400$  bez.  $+4430$  Volt blieb die Nadel in ihrer Ruhelage.

Wird nach Hrn. Precht<sup>1)</sup> das Potential, bei dem die Entladung anfängt, mit  $AP$  bezeichnet, im vorliegenden Falle  $AP = -3480$  bez.  $+4530$  Volt, so findet man, dass der Unterschied zwischen  $AP$  und  $M$  für negative und positive Elektrizität fast gleich gross ist. Derselbe beträgt nämlich für negative Strahlung 60, für positive 70 Volt. Im Verhältnis zu den von Hrn. Precht angegebenen Unterschieden zwischen  $AP$  und  $M$  ist der von mir beobachtete ein sehr geringer. Der Grund, dass die von Hrn. Precht<sup>2)</sup> beobachteten Unterschiede zwischen  $AP$  und  $M$  bedeutend grösser sind als die meinigen, ist nur in der von ihm gewählten Versuchsanordnung zu suchen.

Ich glaube noch darauf hinweisen zu müssen, dass vor Beginn der Versuche keine Ausstrahlung aus der Spitze stattgefunden hat; während derselben wurde die Spitze nicht entladen, sondern blieb stets mit der geladenen Flaschenbatterie in Verbindung.

Zur Beantwortung der Frage, ob man für  $M$  denselben Wert erhält, wenn man von einem über  $M$  liegenden Potential abwärts gehend letzteres so lange verringert, bis die Entladung aufhört, verfuhr ich in folgender Weise.

Zu Beginn des Versuches legte ich das Potential  $-3600$  Volt an die Spitze und beobachtete die Nadel unter Aufhebung der Erdverbindung. Da die Nadel sofort aus dem Gesichtsfeld verschwand, legte ich wieder an Erde, verminderte das Spitzenpotential in der schon angegebenen Weise auf  $-3500$  Volt und beobachtete wieder unter Aufheben der Erdverbindung. Da die Nadel noch aus dem Gesichtsfeld verschwand, er-

1) J. Precht, Wied. Ann. 49. p. 174. 1893.

2) J. Precht, l. c. p. 174 hat zur Bestimmung von  $AP$  und  $M$  ein Aluminiumblattelektroskop benutzt, hat aber selbst auf die Schwierigkeit, die mit dieser Bestimmungsart verbunden ist, ausdrücklich hingewiesen.

niedrigte ich das Spitzenpotential auf  $-3450$  Volt. Bei diesem Potential wanderte die Nadel noch ziemlich rasch, aber sie ging nicht mehr aus der Scale heraus. Durch wiederholtes vorsichtiges Vorwärtsdrehen an den Saugspitzen und Beobachten der Elektrometernadel erreichte ich die langsamste gleichmässige Nadelwanderung bei  $-3420$  Volt.

In analoger Weise begann ich bei der Bestimmung des positiven  $M$  mit  $+4600$  Volt und erhielt den Wert  $+4460$  Volt. Auch diese Werte ( $-3420$  bez.  $+4460$  Volt) blieben constant.

Durch die vorstehend beschriebenen Versuche glaube ich bewiesen zu haben, dass es auf die Grösse des  $M$  ganz ohne Einfluss ist, ob man dasselbe „aufwärts“ oder „abwärts“ bestimmt.

Als weitere Frage trat auf, ob  $M$  für alle Fälle constant bleibt. Zu dieser Frage haben mich gleich meine ersten Beobachtungen, die ich über die ausgestrahlten Elektrizitätsmengen anstellte, veranlasst.

Diese Versuche, auf die ich später eingehender zurückkommen werde, stellte ich in der Weise an, dass ich zunächst das  $M$  und alsdann die bei den verschiedenen Potentialen ausgestrahlten Elektrizitätsmengen bestimmte. Am Schlusse der Versuchsreihe controlirte ich den zu Anfang derselben bestimmten Wert des  $M$ . Hierbei fand ich, dass das am Ende der Versuchsreihe bestimmte  $M$  stets kleiner war als das zu Anfang bestimmte.

Ich stellte folgenden Versuch an. Zunächst bestimmte ich  $M$  „abwärts“ und erhielt wie früher  $-3420$  bez.  $+4460$  Volt. Alsdann legte ich wieder das Potential  $-3600$  bez.  $+4600$  Volt an die Spitze, liess dieselbe aber bei diesen Potentialen 1 Min. lang ununterbrochen strahlen und ging dann wieder rasch zu dem früheren Potential  $-3420$  bez.  $+4460$  Volt über. Die Nadelwanderung war eine schnellere, die  $M$  hatten somit kleinere Werte angenommen. Als solche ermittelte ich  $-3410$  bez.  $+4450$  Volt. Diese Werte blieben constant. In entsprechender Weise stellte ich die Versuche unter Benutzung höherer Potentiale an. Wie folgende Tabelle zeigt, nahmen die  $M$  bis zu einem bestimmten Spitzenpotential ( $-5000$  bez.  $+6000$  Volt ab, und zwar ist die Abnahme bei positiver Strahlung eine relativ grössere. Die ermittelten Werte blieben

constant. Dieselben Werte erhielt ich, auch wenn die Strahlungsdauer mehr wie 1 Minute betrug.

$M = -3420$ Volt		$M = +4460$ Volt	
-3600 Volt 1 Min., $M = -3410$ Volt		+4600 Volt 1 Min., $M = +4450$ Volt	
3700 „ 1 „	3400 „	4700 „ 1 „	4430 „
3800 „ 1 „	3390 „	4800 „ 1 „	4390 „
3900 „ 1 „	3380 „	4900 „ 1 „	4340 „
4000 „ 1 „	3360 „	5000 „ 1 „	4260 „
4500 „ 1 „	3340 „	5500 „ 1 „	4160 „
5000 „ 1 „	3300 „	6000 „ 1 „	4030 „
6000 „ 1 „	3300 „	7000 „ 1 „	4030 „
7000 „ 1 „	3300 „	8000 „ 1 „	4030 „
8000 „ 1 „	3300 „	9000 „ 1 „	4030 „
9000 „ 1 „	3300 „	10000 „ 1 „	4030 „
10000 „ 1 „	3300 „		

Hiernach möchte ich ein  $M$  des Hrn. Röntgen ( $Mr$ ) und ein durch lebhaft Strahlung vermindertes  $M$  ( $Mv$ ) unterscheiden. Dem ersteren würden die Werte  $-3420$  bez.  $+4460$  Volt, dem letzteren je nach der Grösse des Spitzenpotentials die Werte  $-3410$  bis  $-3300$  bez.  $+4450$  bis  $+4030$  Volt entsprechen.

Wie schon angeführt, habe ich bei sämtlichen Beobachtungen die Spitze ununterbrochen strahlen lassen. Sobald jedoch die Strahlung auch nur einige Sekunden unterbrochen wurde, erhielt ich erst wieder einen Nadelausschlag bei  $-3480$  bez.  $+4530$  Volt. Diese Werte, welche ich von  $-3300$  bez.  $+4030$  Volt aufwärts gehend erhielt, entsprechen den Werten, bei welchen die Entladung anfang, es sind die  $AP$ -Werte von p. 264.

Ich glaube noch auf folgendes hinweisen zu müssen. Es könnte auffallend erscheinen, dass das „abwärts“ bestimmte  $Mr$  statt der Werte  $-3420$  bez.  $+4460$  Volt nicht sofort die Werte  $-3410$  bez.  $+4450$  Volt angenommen hat, da doch bei der  $M$ -Bestimmung abwärts gleich zu Beginn des Versuches auch ein Strahlen bei höherem Potential stattgefunden hat. Dieser Widerspruch ist nur ein scheinbarer. Bei der Bestimmung des  $Mv$  habe ich die Spitze bei  $-3600$  bez.  $+4600$  Volt eine ganze Minute lang strahlen lassen, während die Strahlungsdauer bei der Abwärtsbestimmung des  $Mr$  bei  $-3600$  bez.  $+4600$  Volt nur wenige Sekunden betrug.

Bei der Abwärtsbestimmung des  $M_r$  ist es erforderlich, sich rasch dem  $M$ -Werte zu nähern, um eine wenn auch noch so kurze Strahlungsdauer bei höherem Potential möglichst zu vermeiden. Man kann dieser Gefahr aus dem Wege gehen, wenn man nach jeder Beobachtung die Flaschenbatterie entladet, und alsdann so lange ein stets kleineres Potential wieder an die Spitze legt, bis man in die Nähe von  $AP$  gekommen ist. Doch wäre dieses Verfahren sehr umständlich und zeitraubend. Ich halte daher die Bestimmung des  $M_r$  nach der von Hrn. Röntgen angegebenen Weise für die sicherste und zweckmässigste Bestimmungsart.

Zur Entscheidung der Frage, ob die Abnahme des  $M$  auf die Spitze oder auf die zwischen Spitze und Scheibe befindliche Luftstrecke zurückzuführen sei, wurde während einer Bestimmung des  $M$  mittels eines Ventilators fortgesetzt frische Luft zwischen Spitze und Scheibe geschafft.

Bei ruhendem Ventilator erhielt ich  $M = -3420$  bez.  $+4460$  Volt. Sobald ich jedoch bei diesen Potentialen den Ventilator in Bewegung setzte, ging die Nadel in ihre Ruhelage zurück. Ausschlag erhielt ich alsdann nur bei  $-3480$  bez.  $+4530$  Volt. Diese Werte, welche ich sowohl „aufwärts“ wie „abwärts“ erhielt, blieben constant.

0'	2'	4'	6'	8'	10'
- 3480	3480	3480	3480	3480	3480 Volt
+ 4530	4530	4530	4530	4530	4530 „

Vorstehende Werte sind die bereits angegebenen  $AP$ -Werte.

Die Abnahme des  $M$  ist somit nur auf Veränderungen zurückzuführen, welche die Luft zwischen Spitze und Scheibe infolge der Durchstrahlung erleidet.

Eine der Abnahme des  $M$  entsprechende Zunahme der ausgestrahlten Elektrizitätsmengen konnte ich nicht feststellen.<sup>1)</sup>

### III. Prüfung der Formeln $c V(V - M)$ und $a(V - M)$ .

Durch die vorstehend beschriebenen Versuche glaube ich gezeigt zu haben, dass  $M$  abhängig ist sozusagen von der

1) Fr. Tamm, Inaug.-Diss. p. 16.

Vorgeschichte der in Frage kommenden Luftstrecke zwischen Scheibe und Spitze; dass man einen grösseren Wert für  $M$  erhält, wenn der Luftraum zwischen Scheibe und Spitze vor der Bestimmung nur wenig durchstrahlt wird, und dass man einen kleineren Wert erhält, wenn man durch Anwendung eines höheren Spitzenpotentials zuerst eine längere lebhaftere Strahlung hervorruft und dann rasch das  $M$  bestimmt.

Welchen Wert des  $M$  muss ich nun in die Formeln  $cV(V-M)$  und  $a(V-M)$  einsetzen, um Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu finden, und innerhalb welches Bereiches ist dies der Fall?

Nach Tabelle p. 266 gehört zwar bis zu einer bestimmten Grenze zu jedem Spitzenpotential ein besonderes  $Mv$ , bei den Berechnungen<sup>1)</sup> jedoch habe ich *zunächst* nur den Wert des  $Mr$  und den kleinsten Wert des  $Mv$  berücksichtigt, um zu sehen, wie gross der Unterschied zwischen Berechnung und Beobachtung überhaupt sein kann.

Die Untersuchungen nun haben ergeben, dass keine der beiden Formeln die Beobachtungen *in jeder Beziehung* mit ausreichender Genauigkeit wiederzugeben vermag, weder wenn man für  $M$  den Wert des  $Mr$ , noch wenn man den des kleinsten  $Mv$  einsetzt. Die Formel  $cV(V-M)$  passt sich für negative Strahlung, wenn  $M = Mr$  gesetzt wird, den Beobachtungen verhältnismässig gut an, hingegen lässt die Uebereinstimmung für positive Strahlung zu wünschen übrig. Für diese stimmt die Formel des Hrn. Sieveking für  $M = Mr$  etwas besser, aber auch nicht sehr gut. Dagegen erhält man sehr gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten für negative wie positive Strahlung, wenn man jeweils in die Formel  $cV(V-M)$  für  $M$  das arithmetische Mittel aus  $Mr$  und dem kleinsten Wert von  $Mv$  einsetzt. Die Genauigkeit der Formel

$$cV\left(V - \frac{Mr + Mv}{2}\right)$$

bleibt auch für verschiedenen Spitzenabstand bestehen.<sup>2)</sup>

1) Fr. Tamm, Inaug.-Diss. p. 17—21.

2) l. c. p. 22—26.

## IV. Versuche in geschlossenen Gefässen.

Zu den Untersuchungen des Abhängigkeitsverhältnisses der Spitzenentladung von der Luftfeuchtigkeit und dem Luftdruck benutzte ich zunächst eine Glasflasche von 22 cm Höhe, 14 cm lichtigem Durchmesser und 5 mm Wandstärke. In derselben war unter Beibehaltung der früheren Versuchsanordnung der Strahlapparat in etwas veränderter Form eingeschlossen. Die Spitze, in der früher beschriebenen Weise hergestellt, war in eine mit Paraffin ausgegossene Glasröhre eingeschmolzen und mittels Gummiringes in den Flaschenhals eingeführt. Zwei mit Hähnen versehene Ansatzstücke dienten zur Verbindung mit einem Trockenapparat bez. mit der Luftpumpe (Wasserstrahlpumpe). Als Scheibe diente eine Hg-Schicht von 1,5 cm Höhe, in welche ein Platindraht zur Ableitung der übergestrahlten Elektrizitätsmengen eintauchte. Derselbe war an dem einen Ende einer rechtwinklig gebogenen Glasröhre, welche mittels eines über dem Boden angebrachten Glasschiffes in die Flasche eingeführt war, eingeschmolzen. Die Glasröhre war mit Hg gefüllt, in welches die Zuführung zum Umschalter eintauchte. Als Füllung benutzte ich zunächst Zimmerluft. Gleich bei dem ersten Versuch stiess ich auf eine Schwierigkeit. Es zeigte sich, dass die in den gleichen Zeiten übergestrahlten Elektrizitätsmengen nicht constant blieben, sondern allmählich abnahmen. Die Untersuchungen wurden bei verschiedenem Spitzenabstand vorgenommen.

Da ich mit den Versuchen in der Glasflasche kein befriedigendes Ergebnis erzielen konnte, stellte ich mir ein kesselförmiges Gefäss her, dessen Hülle während der Versuche zu Erde abgeleitet werden konnte. Das Gefäss bestand aus 0,25 cm dickem Eisenblech und hatte eine Höhe sowie einen Durchmesser von 26 cm. In der Decke war ein konischer Ansatz zur Aufnahme der Spitze, welche in der früher beschriebenen Weise hergestellt war, centrisch angebracht. Zur Abdichtung der Spitze diente ein Gummiring mit daraufgegossener Paraffinschicht. Das Paraffin wurde, nachdem der Kessel etwa bis zur Hälfte evacuirt war, in flüssigem Zustand auf den Gummiring gegossen. In zwei mehr am Rande befindlichen Ansätzen waren die Zuführungshähne aus Glas mit Siegellack eingegossen,



conaxial mit der Spitze befand sich im Boden ebenfalls ein Ansatz, in welchem ein Kupferstab, auf den eine Zinkscheibe von 13 cm Durchmesser aufgenietet war, mit Siegellack eingegossen. Die Zinkscheibe war auf der der Spitze zugekehrten Seite amalgamirt, die Rückseite und der Kupferstab waren mit einem Eisenlacküberzug versehen.

Zur vollständigen Abdichtung war der Kessel mit einem achtfachen Emaillackanstrich versehen. Nur die äussere Siegel-

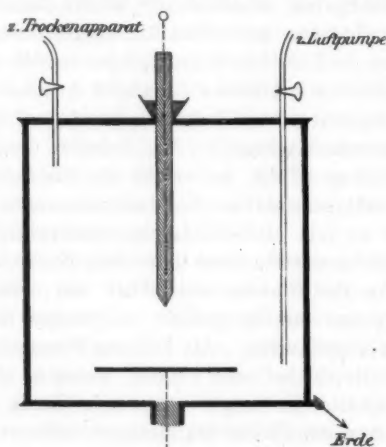


Fig. 2.

lackfläche des unteren Ansatzes trug einen Paraffinüberzug. Diese Stelle war ursprünglich ebenfalls mit Emaillack überstrichen. Der Lack aber musste wieder entfernt werden, da derselbe in flüssigem Zustande sich als Isolator, in festem dagegen als Conductor erwiesen hat. Im Inneren war der Kessel behufs Verhinderung von Oxydationen verkupfert.

Zunächst wurde der Apparat auf Konstanz der in ihm übergestrahlten Mengen geprüft. Die Hülle wurde während der Versuche an Erde gelegt. Als Füllung diente sowohl feuchte wie trockene Luft. Die Versuche<sup>1)</sup> ergaben eine überaus gute Konstanz.

1) F. Tamm, l. c. p. 32—33.



Auch war ein quantitativer Unterschied in den Elektrizitätsmengen, welche in freier Luft, und denjenigen, die im Kessel überstrahlten, nicht vorhanden.

#### V. Einfluss der Luftfeuchtigkeit auf die Spitzenentladung.

Aus den Kesselversuchen hatte sich ergeben, dass die ausgestrahlten Elektrizitätsmengen unter den gleichen Bedingungen in trockener Luft grösser waren als in feuchter. Da dieser quantitative Unterschied nur auf die Luftfeuchtigkeit zurückgeführt werden konnte, stellte ich zur näheren Untersuchung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit auf die Spitzenentladung folgenden Versuch an.

Unter Beibehaltung der früheren Versuchsanordnung benutzte ich einen Kessel aus Eisenblech von 40 cm Höhe und Durchmesser. Derselbe war in derselben Weise wie der p. 270 beschriebene eingerichtet. Nur war in der halben Höhe in der Wand ein Glasfensterchen angebracht, hinter dem ein genau gehendes Lambricht'sches Polymeter aufgehängt war.

Behufs Vermeidung von Verlusten an übergestrahlter Elektrizität war die Scheibe mit einer Isolationsvorrichtung, welche im Princip der Mascart'schen<sup>1)</sup> ähnlich war, versehen.

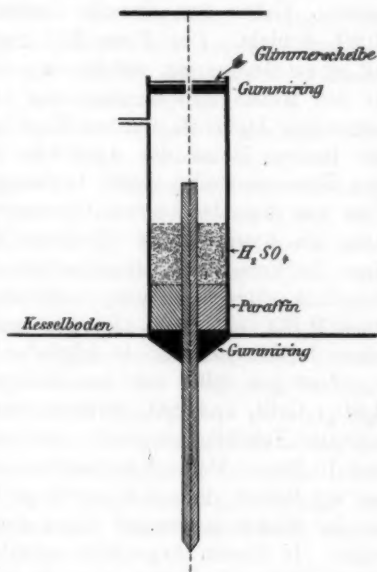


Fig. 3.

1) G. Wiedemann, Elektrizität 1. § 8. 1893.

Ein dünner Messingstab von 30 cm Länge war in ein 20 cm langes, 2 cm weites Glasrohr so mit Paraffin eingegossen, dass noch ein freies Ende von 10 cm übrig blieb. Auf diesem war eine Zinkscheibe von 13 cm Durchmesser aufgelötet. Rückseite der Scheibe und freies Ende des Messingstabes waren mit einem Eisenlacküberzug versehen. Diese Vorrichtung war in einem 15 cm langen, 5 cm weiten Glaszylinder so eingesetzt, dass zwischen Scheibe und oberem Zylinderrand ein Abstand von 3 cm verblieb. Der Glaszylinder war unten mit einem Gummiring, durch den die engere Röhre herausragte, abgeschlossen und auf 3 cm mit Paraffin ausgegossen. Ueber dem Paraffin befand sich eine 4 cm hohe  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Schicht. Der obere Teil des Zylinders war ebenfalls mit einem Gummiring, welcher mit einer 1 cm weiten Bohrung für den Messingstab versehen war, abgeschlossen. Auf dem Gummiring lag noch, um ein Eindringen von Feuchtigkeit in den inneren Raum des Apparates möglichst zu vermeiden, eine Glimmerscheibe, deren Oeffnung für den Messingstab so klein war, dass der Abstand Glimmerscheibe-Messingstab nicht mehr als 1 mm betrug. Nachdem der gesamte Apparat in einen im Kesselboden angebrachten conischen Ansatz mittels Sieglack eingegossen war, wurde durch das seitliche Ansatzstück  $\text{H}_2\text{SO}_4$  eingefüllt. Hierauf prüfte ich den Apparat auf seinen Isolationszustand in folgender Weise.

Zunächst füllte ich den Kessel mit Luft, welche mit  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{CaCl}_2$  und  $\text{P}_2\text{O}_5$  gereinigt und getrocknet wurde. Der geringste Feuchtigkeitsgehalt, den ich erreichen konnte, betrug 10 Proc. Unter Einschaltung einer Condensatorcapacität von 0,1 Mikrof. liess ich so lange Elektrizität überstrahlen, bis die Elektrometernadel einen Ausschlag von 85 Sct. anzeigte. In diesem Augenblick unterbrach ich die Verbindung Batterie-Spitze, während Apparat und Elektrometer in Verbindung blieben. Der Nadelausschlag änderte sich, wie folgende Reihe zeigt, innerhalb 5 Min. nicht.

0'	1'	2'	3'	4'	5'
85,0	85,0	85,0	85,0	85,0	85,0 Sct.

Die Isolation der Scheibe war also eine sehr gute. Als dann liess ich unter fortwährender Beobachtung der Elektro-

meternadel durch einen bis auf den Kesselboden reichenden Gummischlauch langsam Dampf einströmen, bis die Luft vollständig mit Wasserdampf gesättigt war. Während dieses Vorganges, der 47 Sec. dauerte, konnte ich ebensowenig wie vorher ein Zurückgehen der Nadel feststellen. Erst nach einer weiteren Minute ging, wie folgende Reihe zeigt, die Nadel allmählich zurück.

0'	1'	2'	3'	4'	5'
85,0	84,9	84,7	84,5	84,2	84,0 Sct.

Hiernach konnte, da jeder Strahlungsversuch nur 10 Sec. dauerte und niemals während der folgenden Versuche ein derartig starker Dampfstrom durch den Apparat geschickt wurde, die Isolation des Apparates für den gedachten Zweck für vollständig ausreichend angesehen werden.

Denselben führte ich nun in folgender Weise aus. Zunächst bestimmte ich bei 10 Proc. Feuchtigkeitsgehalt die übergestrahlte Elektrizitätsmenge. Hierauf vermehrte ich langsam die Luftfeuchtigkeit, indem ich die in den Kessel eingeleitete Luft vorher durch eine mit Wasser gefüllte Waschflasche zog, bis das Polymeter einen Gehalt von 20 Proc. anzeigte und bestimmte wieder die übergestrahlte Menge.

So von 10 zu 10 Proc. weitergehend, bestimmte ich die Elektrizitätsmengen bei den übrigen in der folgenden Tabelle angegebenen Feuchtigkeitsgehalten. Eine Steigerung der letzteren durch Einströmenlassen von Wasserdampf ist nicht empfehlenswert, da durch denselben eine so rasche Zunahme der Feuchtigkeit erfolgt, dass ein Beobachten in denselben Intervallen unmöglich wird. Zur Prüfung der Werte verfuhr ich in umgekehrter Weise, indem ich durch den Kessel wieder trockene Luft leitete.

So erhielt ich bei einem Spitzenpotential von  $\pm 6000$  Volt, einem Scheibenabstand von 10 cm, einer Strahlungsdauer von 10 Sec. und einer Capacität von 0,5 Mikrof. (der besseren Uebersicht wegen führe ich die den Mengen entsprechenden Scalenteile an) bei:

-				+			
0 Proc.			Im Mittel	0 Proc.			Im Mittel
	—	—	30,0		—	—	21,0
10	"	29,8	30,2	10	"	20,7	21,1
20	"	29,7	30,1	20	"	20,4	21,0
30	"	29,5	29,9	30	"	19,9	20,9
40	"	29,1	29,7	40	"	19,3	20,7
50	"	28,2	29,0	50	"	18,4	20,4
60	"	27,0	28,0	60	"	17,3	19,7
70	"	24,8	26,0	70	"	15,7	18,5
80	"	21,6	23,2	80	"	13,4	16,6
90	"	17,1	19,3	90	"	9,4	13,0
100	"	11,9	11,9	100	"	5,8	5,8

Die Richtung der Pfeile deutet den Gang des Versuches an.

Die für einen Feuchtigkeitsgehalt von 0 Proc. angegebenen Werte sind Extrapolationswerte.

Nach vorstehender Tabelle ist der die Ausstrahlung hindernde Einfluss der Luftfeuchtigkeit bis zu 50 Proc. ein sehr geringer, während derselbe von 50 Proc. an mit der Zunahme des Feuchtigkeitsgehaltes rasch wächst.

Beobachtungen, welche die Herren Elster und Geitel<sup>1)</sup> vor kurzem über Elektrizitätsstreuung in der Luft angestellt haben, bestätigen den die Entladung hemmenden Einfluss der Luftfeuchtigkeit.

#### VI. Einfluss des Luftdruckes auf die Spitzenentladung.

Zur Bestimmung des Abhängigkeitsverhältnisses der Spitzenentladung vom Luftdruck benutzte ich unter Beibehaltung der früheren Versuchsanordnung als Untersuchungsapparat den p. 270 näher beschriebenen Kessel und als Kesselfüllung trockene Luft. Ausserdem verwendete ich bei den niederen Drucken eine Voss'sche Influenzmaschine von 60 cm Scheibendurchmesser und neben dem Elliot'schen Glimmercondensator noch einen Papiercondensator von 20 Mikrof. von Siemens und Halske. Die Bestimmung der den ausgestrahlten Mengen entsprechenden Potentiale erfolgte in zweifacher Weise.

Einmal wurde die den Mengen entsprechende Anzahl Volt bei demselben Spitzenpotential und den verschiedenen Drucken, zum anderen Mal bei demselben Druck und den verschiedenen

1) J. Elster u. H. Geitel, Ann. d. Phys. 2. p. 425. 1900.

Spitzenpotentialen bestimmt. Hierdurch war eine hinreichend genaue Controle gegeben. Bei Vergleichung sämtlicher entsprechender Werte betrug der Unterschied in keinem Fall mehr als 3 Proc.

Die Strahlungsdauer betrug 10 Sec., der Spitzenabstand 10 cm.

Die Ergebnisse der Beobachtungen lassen sich sowohl für negative wie für positive Elektrizität darstellen durch die Formel:

$$e_x = e_{76} \left[ \frac{76}{x} - \sqrt[3]{\frac{V}{10^5}} \log \text{nat} \left( \frac{76}{x} \right) \right]^2.$$

Hierin bedeuten  $e_x$  die bei einem bestimmten Druck gesuchte Elektrizitätsmenge,  $e_{76}$  die bei einem Druck von 76 cm ausgestrahlte Menge, 76 den Druck bei 76 cm,  $x$  den Druck bei  $x$  cm,  $V$  das Spitzenpotential.

Die Formel gestattet also die Elektrizitätsmenge zu berechnen, welche bei einem beliebigen Drucke ausgestrahlt wird, sobald man diejenige Menge kennt, welche bei 76 cm Druck und dem gleichen Spitzenpotential ausgestrahlt wird.

Aus der Thatsache, dass die Formel für positive wie negative Elektrizität gilt, folgt, dass das Verhältnis  $+e_x/-e_x = \text{const.}$  für die verschiedenen Drucke bei gleichem Spitzenpotential, während ein bestimmtes Verhältnis  $+e_x/-e_x$  bei verschiedenen Spitzenpotentialen und demselben Druck nicht existirt.

#### Negative Elektrizität.

Druck in cm	$V = - 4000$		$V = - 10000$	
	Gefunden	Berechnet	Gefunden	Berechnet
76	1,40 M.C. <sup>1)</sup>	1,40 M.C.	13,4 M.C.	13,4 M.C.
70	1,55 "	1,57 "	14,5 "	14,6 "
60	1,98 "	2,00 "	17,6 "	17,8 "
50	2,64 "	2,66 "	22,8 "	22,9 "
40	3,7 "	3,8 "	33,7 "	34,0 "
30	6,8 "	6,9 "	58,0 "	58,6 "
20	14,6 "	14,8 "	134,2 "	135,2 "
10	65,4 "	66,0 "	—	—

1) M.C. = Mikrocoulombs.

Diese wie die folgenden Tabellen enthalten einen Auszug aus den ausführlichen, in der Inaug.-Diss. mitgeteilten Tabellen.

## Positive Elektrizität.

Druck in cm	$V = + 4000$		$V = + 10000$	
	Gefunden	Berechnet	Gefunden	Berechnet
76	0,70 M.C.	0,70 M.C.	9,3 M.C.	9,3 M.C.
70	0,77 "	0,78 "	10,1 "	10,2 "
60	0,98 "	1,00 "	12,3 "	12,5 "
50	1,30 "	1,33 "	16,0 "	16,0 "
40	1,86 "	1,90 "	23,5 "	23,8 "
30	3,3 "	3,4 "	40,4 "	41,0 "
20	7,3 "	7,4 "	93,0 "	93,9 "
10	32,6 "	33,0 "	—	—

Es war noch von Interesse, festzustellen, ob die Formel  $c V(V - M)$ , worin

$$M = \frac{Mr + Mv}{2}$$

ist, ihre Gültigkeit auch für die verschiedenen Drucke beibehält.

Zu diesem Zwecke bestimmte ich  $M$  bei den verschiedenen Drucken in der Weise, dass ich zunächst  $Mr$  feststellte, alsdann 1 Min. lang das Potential  $\pm 7000$  Volt an die Spitze legte und hierauf zu  $Mv$  überging. Spitzenabstand und Kessel-füllung blieben dieselben.

## Negative Elektrizität.

Druck in cm	$Mr$	$Mv$	$\frac{Mr + Mv}{2} = M$
76	2200 Volt	2080 Volt	2140 Volt
70	2190 "	2080 "	2135 "
60	2160 "	2050 "	2105 "
50	2080 "	1990 "	2035 "
40	1950 "	1860 "	1905 "
30	1730 "	1650 "	1690 "
20	1390 "	1330 "	1360 "
10	—	—	910 "

## Positive Elektrizität.

Druck in cm	$M_r$	$M_v$	$\frac{M_r + M_v}{2} = M$
76	3970 Volt	3550 Volt	3760 Volt
70	3960 "	3550 "	3755 "
60	3900 "	3510 "	3705 "
50	3770 "	3400 "	3585 "
40	3520 "	3180 "	3350 "
30	3120 "	2820 "	2970 "
20	2510 "	2270 "	2390 "
10	1640 "	1520 "	1580 "

Vergleicht man in den beiden vorhergehenden Tabellen den Unterschied zwischen  $M_r$  und  $M_v$  bei den verschiedenen Drucken, so findet man, dass dieser Unterschied mit der Abnahme des Druckes kleiner wird. Diese Erscheinung hat ihren Grund wohl darin, dass mit der Abnahme des Druckes die Leitfähigkeit der Luft zunimmt.

Das Ergebnis der Beobachtungen lässt sich darstellen nach der Formel:

$$M_x = M_{76} \frac{1}{\sqrt{\frac{76}{x} - \log \text{nat} \left( \frac{76}{x} \right)}}.$$

Hierin bedeutet  $M_x$  den Mittelwert aus  $M_r$  und  $M_v$  bei einem Druck von  $x$  cm,  $M_{76}$  den Mittelwert aus  $M_r$  und  $M_v$  bei einem Druck von 76 cm.

Die übrigen Grössen sind die gleichen wie in der anderen Formel.

Da obige Formel ebenfalls für positive wie negative Elektrizität gilt, so ist

$$\frac{+M_{76}}{+M_x} = \frac{-M_{76}}{-M_x}$$

und mithin auch das Verhältnis

$$\frac{+M}{-M} = \text{const.}$$

für die verschiedenen Drucke bei gleichem Spitzenabstand, während, wie die Tabellen zeigen,  $(+M_{76}) - (+M_x)$  bedeutend grösser ist als  $(-M_{76}) - (-M_x)$ .

Druck in cm	- M		+ M	
	Gefunden	Berechnet	Gefunden	Berechnet
76	2140 Volt	2140 Volt	3760 Volt	3760 Volt
70	2135 "	2136 "	3755 "	3753 "
60	2105 "	2108 "	3705 "	3704 "
50	2035 "	2040 "	3585 "	3583 "
40	1905 "	1907 "	3350 "	3351 "
30	1690 "	1689 "	2970 "	2967 "
20	1360 "	1362 "	2390 "	2393 "
10	910 "	906 "	1580 "	1592 "

Aus den angeführten Tabellen folgt, dass die Mengen bei hohen Drucken sehr langsam, bei niederen dagegen sehr rasch zunehmen, während die  $M$  bei hohen Drucken langsam, bei niederen rascher abnehmen.

In den beiden folgenden Tabellen will ich noch zeigen, dass die Formel  $c V(V-M)$  die bei verschiedenen Drucken ausgestrahlten Elektrizitätsmengen mit genügender Annäherung wiedergiebt.

#### Negative Elektrizität.

Druck in cm	V = - 4000		V = - 6000		V = - 8000		V = - 10000	
	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.
	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.
76	1,4	1,4	4,2	4,2	8,0	8,5	13,4	14,2
70	1,6	1,5	4,6	4,4	8,6	8,7	14,5	14,9
60	2,0	1,9	5,7	5,8	10,5	11,7	17,6	19,5
50	2,6	2,5	7,6	7,8	13,7	15,2	22,8	24,9
40	3,7	3,9	11,3	11,5	20,4	21,9	33,7	36,2
30	6,8	7,1	19,5	19,9	35,3	37,8	58,0	62,1
20	14,6	16,2	44,7	45,2	80,9	84,9	134,2	138,2

#### Positive Elektrizität.

Druck in cm	V = + 4000		V = + 6000		V = + 8000		V = + 10000	
	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.
	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.
76	0,7	0,5	2,1	2,1	4,8	5,3	9,3	10,1
70	0,8	0,6	2,3	2,3	5,1	5,8	10,1	10,7
60	1,0	0,9	2,8	2,9	6,3	7,2	12,3	13,2
50	1,3	1,2	3,8	4,0	8,2	9,5	16,0	17,3
40	1,9	1,7	5,6	5,7	12,3	13,4	23,5	23,9
30	3,3	3,0	9,7	9,9	21,1	21,9	40,4	38,4
20	7,3	6,9	22,4	23,0	48,0	49,6	93,0	90,5



Da die Formel  $c V(V - M)$  ihre Gültigkeit für die verschiedenen Drucke beibehält, darf man in der Formel p. 275 für  $e_{76}$  setzen  $c V(V - M)$  und erhält dann:

$$e_x = c V(V - M) \left[ \frac{76}{x} - \sqrt[3]{\frac{V}{10^6}} \log \text{nat} \left( \frac{76}{x} \right) \right]^2.$$

Mit dieser Formel kann man also, wenn man für ein bestimmtes Spitzenpotential die bei einem Druck von 76 cm ausgestrahlte Menge kennt, für denselben Spitzenabstand die Mengen für die verschiedenen Spitzenpotentiale bei verschiedenen Drucken berechnen.

Freiburg (Breisgau), Physik. Inst., Januar 1901.

(Eingegangen 1. Juli 1901.)

#### 4. Ueber die angebliche Anomalie des Sauerstoffs bei geringem Drucke; von M. Thiesen.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Die mehrfach bei kleinen Dichten gefundenen Abweichungen der Gase vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze bestehen schlecht vor einer eingehenden Kritik; wie namentlich Amagat hervorgehoben hat, sind diese Abweichungen meistens durch Fehler in den Druckmessungen zu erklären. Nur ein besonders merkwürdiger Fall schien mir eine nähere Prüfung zu verdienen. Bohr hatte angegeben, dass Sauerstoff bei kleinen Drucken eine sehr starke Abweichung zeige und ausserdem bei einem Druck von 0,7 mm eine Zustandsänderung erfahre, die dadurch gekennzeichnet ist, dass bei diesem Drucke eine erhebliche Volumenänderung ohne Druckänderung eintreten soll.

Diese Anomalie ist dann von mehreren anderen Beobachtern bestätigt worden, die ebenfalls auf einen Sprung in der Nähe von 0,7 mm schliessen, und Battelli konnte daher mit einigem Recht diesen Sprung als jetzt endgültig festgestellt hinstellen.

Meine eigenen Messungen führten dagegen zunächst zu dem Ergebnisse, dass ein Sprung in der von Bohr angegebenen Grösse keinesfalls vorhanden sei. Unmittelbar vor dem Bekanntgeben dieses Resultates und mir noch unbekannt hatte auch Lord Rayleigh<sup>1)</sup> angezeigt, dass er ein regelmässiges Verhalten des Sauerstoffs bei 0,7 mm Druck gefunden habe.

Nachträglich schienen mir aber meine Versuche doch noch nicht entscheidend zu sein. Da ich mit grossen Räumen bei verhältnismässig kleinen Oberflächen gearbeitet hatte, so lag noch die Möglichkeit vor, die von Bohr angegebenen Unregelmässigkeiten auf den Einfluss der Wände zurückzuführen, von denen sich bei 0,7 mm Druck eine Schicht flüssigen Sauerstoffs von etwa 0,000001 mm Dicke lösen würde. Dadurch wäre

1) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 68. p. 92. 1901. Inzwischen ausführlich veröffentlicht: London Philos. Trans. 196. A. p. 205. 1901.

zugleich erklärt gewesen, dass aus Battelli's Versuchen ein wesentlich geringerer Wert des Sprunges folgt, während Baly und Ramsay, die mit Capillaren arbeiteten, ausserordentlich grosse Anomalien fanden. Ich glaubte sogar in den übrig bleibenden Fehlern meiner Versuche Spuren eines solchen Verhaltens zu finden.<sup>1)</sup> Andererseits musste ein solches bei einer hoch über der kritischen liegenden Temperatur von vornherein als unwahrscheinlich erscheinen, falls man an eine eigentliche Adsorption mit den namentlich durch Kayser festgestellten Eigenschaften und nicht an eine umkehrbare chemische Verbindung des Gases mit festen Körpern oder eine Auflösung desselben in einer die Wände bedeckenden Flüssigkeit dachte.

Die infolge dessen noch weiter mit vergrösserter Oberfläche angestellten Versuche haben aber ebenfalls eine Uebereinstimmung mit dem Boyle-Mariotte'schen Gesetze ergeben. Die Anomalie ist in der von Bohr angegebenen und mit seinen Mitteln erkennbaren Grössenordnung unter den Bedingungen meiner Versuche sicher nicht vorhanden. Es gewinnt damit an Wahrscheinlichkeit, dass sie überhaupt auf Beobachtungs- und Interpretationsfehlern beruhe, wenigstens wird man bei einer Kritik des vorhandenen Materiales diese Möglichkeit nicht ausser Acht lassen dürfen.

Ich habe in den folgenden Capiteln eine solche Kritik zu geben versucht, meine Aufgabe allerdings vielfach dadurch sehr erschwert gefunden, dass oft für die Beurteilung sehr wesentliche Punkte in den Veröffentlichungen nicht mitgeteilt werden. Hieran schliesse ich die Ergebnisse meiner eigenen Versuche an.

2. Die Annahme einer Anomalie im Verhalten des Sauerstoffs wird auch heute noch vor allem durch die Versuche von Bohr<sup>2)</sup> gestützt, da diese kaum eine andere Deutung zuzulassen scheinen. Bohr benutzte im wesentlichen ein Regnault'sches Differentialmanometer mit beiderseits geschlossenen Schenkeln; der eine der beiden Schenkel war

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. p. 80. 1901.

2) C. Bohr, Wied. Ann. 27. p. 459. 1886; vorher in den Mém. Ac. de Copenhagen erschienen.

calibriert und enthielt etwas Sauerstoff; durch Aenderung des Niveaus in der passend geformten Wanne änderte man Volumen und Druck des Sauerstoffs.

Das Ergebnis seiner Versuche wird von Bohr durch die Formeln wiedergegeben:

$$(p + 0,109)v = k, \quad p > 0,70,$$

$$(p + 0,070)v = k_1, \quad p < 0,70,$$

wo  $p$  den Druck in Millimetern Quecksilber,  $v$  das Volumen bezeichnet. Ferner ergibt sich aus seinen Angaben das Verhältnis der Constanten  $k$  und  $k_1$  zu  $k_1/k = 1,047$  für die erste mit 18,5 mm weitem Rohr bei einer Temperatur von  $14^\circ$  und zu  $k_1/k = 1,025$  für die zweite mit 32 mm weitem Rohr bei  $11,5^\circ$  angestellte Reihe.

Die Volumenänderung bei dem Drucke von 0,7 mm würde sich nach diesen Daten gleich 10 v. H. für die erste, gleich 8 v. H. für die zweite Reihe ergeben; diese Volumenänderung tritt ferner nach Bohr als Volumenvergrößerung sofort ein, während bei einer Volumenverkleinerung Druckschwankungen stattfinden, die aber nach 5 Stunden sicher verschwunden sind.

Bei einer Beurteilung der Versuche und Formeln Bohr's werden zwei verschiedene Abweichungen vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze scharf zu unterscheiden sein. Die eine, welche in den Formeln durch die zu  $p$  hinzugefügte Constante gekennzeichnet wird, ist durch systematische Beobachtungsfehler zu erklären und wird auch, trotz der Sorgfalt, mit der Bohr solche Fehler zu vermeiden suchte, auf solche zurückgeführt werden müssen; es genügt schon die Annahme, dass sämtliche Drucke um 0,1 mm zu klein beobachtet wurden, noch besser die Annahme, dass sich dieser Fehler bei Drucken unter 0,5 mm etwas verringerte. Welche Ursache für einen solchen Fehler anzunehmen sei, ist nicht festzustellen, doch scheint es mir auffällig, dass Bohr, der andere wohl ebenso bekannte Fehlerquellen ausführlich bespricht, nichts über die Justirung seines Kathetometers erwähnt.

Nach Beseitigung der einen Abweichung durch die erwähnte Annahme bleibt noch der Sprung übrig und tritt nur um so stärker hervor, welchen das Volumen des Gases bei einem Drucke von 0,7 mm zeigte, und den man wohl als

Bohr'sche Anomalie bezeichnen kann. Das Gas hätte sich dann sowohl oberhalb als unterhalb dieses Druckes wie ein vollkommenes Gas verhalten; bei diesem Drucke wäre stets eine Aenderung des Volumens von etwa 10 v. H. eingetreten.

Diese Abweichung durch zufällige Beobachtungsfehler zu erklären, geht nicht gut an; will man sie doch auf Beobachtungsfehler zurückführen, so muss man systematische, von dem beobachteten Drucke stark abhängige und sich sprungartig ändernde Fehler annehmen.

Ob solche Fehler begangen werden konnten, hängt von der nicht mitgetheilten Art der Beobachtung ab. Wurde das Fernrohr etwa durch Neigen stets bei der Noniusablesung Null auf den einen Meniscus eingestellt, so ist die Möglichkeit solcher Fehler in den Teilungsfehlern des Nonius ohne weiteres gegeben. Man hätte dann etwa einen constanten, auf mangelhafter Justirung des ein für allemal fest aufgestellten Kathetometers beruhenden Fehler von  $+0,05$  mm und zwischen den Grenzen  $-0,02$  und  $+0,06$  mm liegende Teilungsfehler des Nonius anzunehmen. Aber diese Annahme erklärt auch noch nicht die Angaben Bohr's über den trotz Volumenvergrößerung sich gleichbleibenden Druck von  $0,70$  mm also einen Druck, bei dem doch wohl ein Noniusstrich in genauer Coincidenz gewesen wäre. Jedenfalls wären auch heute noch genauere Angaben über die von Bohr befolgte Einstellungsmethode erwünscht.

3. Baly und Ramsay benutzten einen Apparat, welcher zwei miteinander verbundene McLeod'sche Manometer enthielt; ihre Hauptaufgabe war, die thermische Ausdehnung stark verdünnter Gase zu messen. Dabei machten sie eine sehr auffallende, die Bohr'sche Anomalie einigermaassen bestätigende Beobachtung.<sup>1)</sup> Als einmal der Druck des Sauerstoffs im Apparate  $1,4$  mm betrug, hätte ein weiterer Pumpenzug der Quecksilberluftpumpe den Druck auf etwa  $0,75$  mm herabbringen müssen. Thatsächlich zeigte aber jetzt das eine (von der Pumpe entferntere) Manometer einen über achtmal so grossen Druck an als das andere, und der Unterschied blieb auch bei wiederholtem Oeffnen und Schliessen der Manometer

1) E. C. C. Baly u. W. Ramsay, Phil. Mag. (5) 38. p. 323. 1894.

bestehen. Erst nach 78 Stunden gaben die Manometer denselben Druck. Aber bei dem Versuche, jetzt die Ausdehnung des Gases (durch Erwärmen des einen Manometers, Abschliessen der Manometer und Messung des von ihnen nach der Abkühlung angegebenen Druckes) zu bestimmen, trat die Störung sofort wieder ein, und man fand für die Ausdehnung einen viel zu kleinen Wert. Die gleiche Anomalie zeigte sich auch in folgenden Versuchen. Bei geringeren Drucken zeigte sich nichts derartiges.

Hier ist ohne Zweifel eine Anomalie vorhanden, entweder im Verhalten des Gases oder in den Versuchsbedingungen. Eine sehr einfache Erklärung, die durch die bei der Wichtigkeit der Beobachtung etwas dürftigen Angaben der Beobachter zwar nicht gestützt aber auch nicht widerlegt wird, würde in der Annahme liegen, dass die Verbindung zwischen den Manometern etwa durch einen Quecksilbertropfen in dem horizontalen Verbindungsrohre zeitweise ganz oder doch so weit aufgehoben war, dass die bei diesem geringen Drucke schon ziemlich grosse Zähigkeit des Gases einen raschen Ausgleich verhinderte. Man müsste dann ferner voraussetzen, dass das entferntere Manometer den Druck 1,4 mm angab, und dass das Verhältnis der Räume ein solches war, dass das der Pumpe näher liegende Manometer durch einen Pumpenzug auf  $\frac{1}{8}$  evacuirt werden konnte, oder, was wohl wahrscheinlicher ist, dass das entferntere Manometer einen höheren Druck als 1,4 mm angab, aber bei den vorausgehenden Pumpenzügen nicht abgelesen worden war.<sup>1)</sup>

Gegen diese Erklärung würde allerdings die Unwahrscheinlichkeit sprechen, dass die Beobachter, da sich die Erscheinung wiederholt zeigte, nicht auf ihre Ursache aufmerksam geworden sein sollten.

Aber auch wenn die Erscheinung thatsächlich stattfand, so bestätigt sie doch die Beobachtung Bohr's nur insofern, als danach in der Nähe des Druckes von 0,7 mm in dem Verhalten des Sauerstoffs merkwürdige Eigentümlichkeiten auf-

1) Aus den Angaben p. 321, 322, 324 würde allerdings zu folgen scheinen, dass die Manometer Drucke von 0,056 mm und 0,46 mm anzeigten, nach p. 314 u. 324 wäre aber der Druck das Zehnfache gewesen, also die obige Erklärung nicht ausgeschlossen.

treten. Gerade das verschiedene Verhalten der beiden Manometer würde dagegen der Bohr'schen Ansicht widersprechen, dass bei diesem Drucke die ganze Masse des Gases eine von Nebenumständen wesentlich unabhängige Umwandlung erfahre.

4. Die Versuche Campetti's<sup>1)</sup> werden von ihm selbst und danach auch von den späteren Schriftstellern, die diese Frage behandeln, als eine Bestätigung der Ergebnisse Bohr's angesehen, doch ist wohl das Gegenteil der Fall. Campetti vergleicht die Compressibilität des Sauerstoffs mit der des Wasserstoffs, die er als normal ansieht, bei Drucken unter 30 mm. Bei den grösseren Drucken verhält sich dann auch Sauerstoff normal; bei kleineren Drucken werden die Ergebnisse durch den Einfluss der Beobachtungsfehler unsicher; doch erleidet nach Campetti das Product  $p v$  ähnlich wie bei Bohr einen deutlichen Sprung in der Nähe von 0,7 mm. Dies kann zugegeben werden, aber die Richtung dieses Sprunges fällt nur in einer von sechs Reihen mit der Richtung bei Bohr zusammen, in fünf anderen Reihen ist die Richtung die entgegengesetzte. Auch der Gang von  $p v$  vor und nach dem Sprunge fällt dem Zeichen nach, soweit er überhaupt mit einiger Bestimmtheit hervortritt, nicht wesentlich häufiger mit dem von Bohr gefundenen Gange zusammen, als er ihm widerspricht. Ein bestimmtes Ergebnis folgt aus den Versuchen Campetti's daher überhaupt nicht.

5. Battelli<sup>2)</sup> drückte das untersuchte Gas durch eingepresstes Quecksilber auf nahe die Hälfte des Volumens zusammen, nachdem er es sich vorher durch Verdrängen des Quecksilbers hatte ausdehnen lassen. Mitgeteilt wird nur das Mittel der beiden Resultate, eine Controle des von Bohr angegebenen Unterschiedes im zeitlichen Eintreten der Anomalie bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung des Gases ist daher von vornherein ausgeschlossen. Den Anfangsdruck<sup>3)</sup> maass er mit einem Regnault'schen Differentialmanometer, die Druckänderung mit einem besonders empfindlichen Mikro-

1) A. Campetti, Atti di Torino 31. p. 52. 1895.

2) A. Battelli, Nuovo Cimento (5) 1. p. 5 u. 81. 1901.

3) Dass dies der grössere Druck war, ist ohne Einfluss, wenn die Messungsfehler unabhängig vom Druck waren; es wäre von Nachteil gewesen, wenn die Fehler mit dem Drucke wuchsen.



manometer. Der Apparat bestand in der einen Versuchsreihe ganz aus Glas, in einer anderen war das Gas grösstenteils in Gefässen aus polirtem Eisen enthalten.

Battelli zieht aus seinen Versuchen, denen er mehrere Gase unterzogen hat, ohne nähere Discussion nur qualitative Folgerungen. Für Sauerstoff schliesst er zunächst, ohne besonderes Gewicht darauf zu legen, dass dieser bei äusserst kleinen Drucken etwas stärker zusammengedrückt werde, als es das Boyle-Mariotte'sche Gesetz fordere, dann aber, dass sich in der Nähe eines Druckes von 0,7 mm, entsprechend den Versuchen früherer Beobachter, eine Anomalie zeige, die jetzt sicher feststehe.

Was nun den ersten Punkt betrifft, so wird man thatsächlich aus Battelli's Versuchen die Unrichtigkeit der Bohr'schen Formel

$$(p + 0,07)v = K_1, \quad p < 0,7$$

folgern; die kleinste von Battelli gemessene Dichte ist nur  $\frac{2}{9}$  von derjenigen, bei der nach Bohr der Sauerstoff überhaupt keinen Druck mehr ausüben dürfte. Die geringe im entgegengesetzten Sinne gefundene Abweichung lässt sich aber ohne weiteres auf kleine Fehler in den Druckmessungen und sogar auf den Ueberfluss der von Battelli berechneten Decimalen zurückführen. So findet bei dem kleinsten benutzten Drucke von 0,014 mm Battelli das Verhältniss der  $p v$  gleich 0,9832, wenn das dem grösseren Drucke entsprechende Product in den Zähler gesetzt wird; nach Bohr's Formel müsste es 1,6 sein; der von der Theorie geforderte Wert Eins ergibt sich, wenn man den Enddruck zu 0,014235 mm, also nicht verschieden von dem wirklich beobachteten, annimmt.

Was den zweiten, den Hauptpunkt betrifft, so müssen wir uns zunächst darüber Rechenschaft geben, was wir zu erwarten haben. Wäre der von Bohr angegebene Sprung vorhanden, verhielte sich aber das Gas im übrigen wie ein normales, so müsste das Verhältniss der  $p v$  gleich Eins sein, solange Anfangs- und Enddruck beide entweder über oder unter 0,7 mm liegen, dagegen nahe gleich 0,9, falls der eine Druck über, der andere unter 0,7 mm liegt.

Thatsächlich zeigt das Verhältniss bei den Versuchen mit



den Eisencylindern einen ganz anderen Gang, es fängt schon an stark zu sinken, während der kleinere Enddruck noch weit über 0,7 liegt und steigt dann rasch etwa ebenso hoch über den Wert Eins, als es darunter gefallen war. Wollte man eine regelmässige Abweichung vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze als Ursache annehmen, so hätte man etwa zu setzen

$$\begin{aligned} p v &= 1, & p &> 1,1, \\ p v &= 1 + 0,07(1,1 - p), & 1,1 &> p > 0,63, \\ p v &= 1 + 0,13(p - 0,38), & 0,63 &> p > 0,38, \\ p v &= 1, & 0,38 &> p. \end{aligned}$$

Unter  $\alpha$  ist in der folgenden Tabelle das nach diesen Formeln corrigirte Verhältniss  $p_1 v_1 / p_2 v_2$  angegeben, während  $\beta$  der von Battelli berechnete Wert ist.

$p_1$	$p_2$	$\beta$	$\alpha$
1,855	0,985	0,9920	1,000
1,620	0,866	0,9855	1,002
1,450	0,781	0,9779	1,000
1,390	0,750	0,9764	1,001
1,321	0,715	0,9733	1,000
1,194	0,648	0,9707	1,002
1,115	0,604	0,9725 <sup>1)</sup>	1,002
0,961	0,510	0,9926	1,000
0,886	0,462	1,0102	1,006
0,757	0,390	1,0224	1,000

Die Versuche mit den Glasgefässen enthalten nur zwei Beobachtungen an der kritischen Stelle; die Abweichungen zeigen mit den soeben behandelten eine Aehnlichkeit, aber keine völlige Uebereinstimmung.

Battelli's Versuche haben demnach im allgemeinen keine sprungweise, sondern eine allmählich verlaufende Abweichung von der Theorie ergeben; die grösste Abweichung beträgt nur  $\frac{1}{3}$  des von Bohr gefundenen Sprunges. Da die Abweichung nach Bohr unabhängig von Nebenumständen sein sollte, so ist in diesem Sinne schon der gefundene Unterschied in der Grösse nicht als eine Bestätigung, sondern als eine Widerlegung der Bohr'schen Anomalie anzusehen.

1) In Battelli's Veröffentlichung enthält hier  $p_1 v_1$  einen störenden Druckfehler durch Umsetzung der Ziffern 4 und 6.

Fragen wir schliesslich, wie weit sich die von Battelli gefundenen Abweichungen durch Beobachtungsfehler insbesondere in den Druckmessungen erklären lassen. Die Fehler des Differential- und des Mikromanometers haben beide auf das Resultat sehr nahe denselben Einfluss, der ihrem Verhältnis zum grösseren Drucke gleich ist; es braucht also nicht auf die Frage eingegangen zu werden, welche Fehler überwogen haben dürften. Die grösste in der kritischen Gegend beobachtete Abweichung erfordert nun einen Fehler von 0,035 mm an einem der Instrumente, dagegen giebt die erste mitgeteilte Beobachtung mit den Eisencylindern den Fehler 0,025 mm, die erste Beobachtung mit den Glascylindern sogar 0,058 mm, wenn man hier bei grösseren Drucken das Verhalten des Gases als normal ansieht. Die zweite Beobachtung der früher untersuchten Luft im Eisencylinder giebt 0,063 mm, die zweite im Glascylinder 0,059 mm. Für den später beobachteten Wasserstoff führt die grösste Abweichung auf 0,023 mm, für die zuletzt beobachtete Kohlensäure auf 0,021 mm. Nimmt man daher auch an, dass, wie es wahrscheinlich ist, die Fehler des nur summarisch calibrirten Mikromanometers mit dem Drucke wachsen, so bleiben nach dem mitgetheilten Material immer noch Fehler von einer solchen Grösse zulässig, dass sie die beobachteten Abweichungen erklären, wenn man nicht willkürlich alle Stellen, an denen Fehler dieser Grösse vorkommen, als den Sitz von Anomalien erklären will. Ueberdies scheinen die Fehler mit der Zeit abgenommen zu haben.

6. Für das Bestehen der Bohr'schen Anomalie werden von Battelli noch zwei weitere Autoritäten angeführt. Er sagt<sup>1)</sup>:

„Von einer solchen Anomalie des Sauerstoffs hat man noch einen mittelbaren Beweis in den Versuchen Crookes' über die Bewegung des Radiometers. Er fand in der That, dass bei dem Drucke von 0,76 mm die ablenkende Kraft des Sauerstoffs zwölfmal grösser war als die des Stickstoffs und der Kohlensäure, und dass diese Kraft erst unterhalb 0,15 mm wieder normal wird.“

„Und eine andere Bestätigung der Anomalie findet sich in dem Sprunge, welchen Ebert in der Curve beobachtet hat,

1) l. c. p. 22.

welche die Länge des dunkeln Kathodenraumes im Sauerstoff bei verschiedenen Drucken darstellt; ein Sprung, der gerade bei dem Drucke von 0,7 mm stattfindet.“

Was die erste Bemerkung betrifft, so ist es richtig, dass nach Crookes<sup>1)</sup> die abstossende Kraft, welche eine Kerzenflamme auf einen Radiometerflügel ausübt, bei höheren Drucken von der Ordnung von 0,76 mm im Sauerstoff viel grösser ist als in anderen Gasen und dass sie bei geringeren Drucken von derselben Ordnung wird. Irgend eine Discontinuität in der Nähe von 0,76 mm hat aber Crookes nicht beobachtet, die Curve hat für Sauerstoff denselben Charakter und zeigt einen vielleicht noch glatteren Verlauf als bei den anderen Gasen. Der Druck von 0,76 mm ( $= \frac{1}{1000}$  Atm.) spielt bei Crookes nur insofern eine Rolle, als seine Beobachtungen über die abstossende Kraft bei diesem Drucke anfangen und als er bei den Beobachtungen über die Zähigkeit mit diesem Drucke die Einheit ändert, in der er seine Drucke anführt.

Dagegen hat Ebert in der That den angegebenen Sprung bei 0,7 mm beobachtet. Aber Ebert hebt ausdrücklich hervor, dass die Lage dieses Sprunges ganz von den Umständen insbesondere von den Dimensionen der Elektrode abhängt; für eine grössere Elektrode ergab sich die Lage des Sprunges bei 0,50 mm.<sup>2)</sup> Auch die Versuche Ebert's tragen daher nicht dazu bei, das Bestehen der Anomalie zu bestätigen.

7. Der Apparat, mit welchem ich zunächst die Anomalie des Sauerstoffs zu prüfen versuchte, war in erster Linie dazu bestimmt, die reguläre Abweichung des Wasserdampfes von dem Boyle-Mariotte'schen Gesetze bei Zimmertemperatur zu bestimmen. Ich vermutete, dass diese Abweichung zwar sehr viel kleiner sei, als sie aus Battelli's Versuchen zu folgen scheint<sup>3)</sup>, aber doch noch mit meinen Mitteln der Ordnung nach festzustellen sein müsse.

Aber obgleich ich, um den Einfluss der Gefässwände möglichst herabzusetzen, recht grosse Räume gewählt hatte, so machte sich doch der Einfluss der Gefässwände dadurch bemerkbar, dass nach jeder Vermehrung des Druckes eine

1) W. Crookes, Phil. Trans. 172. p. 410 u. Taf. 57. 1882.

2) H. Ebert, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 104. 1900.

3) A. Battelli, Memorie di Torino (2) 43. p. 66. 1893.

anfangs schneller, dann langsamer verlaufende Druckverminderung, nach jeder grösseren Druckverminderung eine ähnlich verlaufende Druckvermehrung eintrat. So wurde, nachdem der Druck von 0 auf 11 mm vermehrt war, während der ersten Messung in einer halben Stunde eine Druckabnahme von etwa 0,07 mm<sup>1)</sup>, in einem Tage die Gesamtabnahme von 0,15 mm beobachtet, der Wasserdampf verhielt sich so, als ob er mit einer Salzlösung in Berührung sei.

Es mag dahingestellt bleiben, ob diese Störung durch neue sorgfältige Reinigung und Zusammensetzung des Apparates hätte beseitigt werden können; seine Glaswände waren nicht mit kochendem Wasser behandelt worden, und überdies hatten einige durch die Quecksilberpumpen (namentlich eine anfangs benutzte Pumpe nach Kahlbaum) verursachte Unfälle eine kleine nachträgliche Verschmutzung herbeiführen können; jedenfalls war der Apparat in dieser Beschaffenheit nicht geeignet, den Wasserdampf zu untersuchen, und ich ging daher zu den schon vorbereiteten Versuchen mit Sauerstoff über.

8. Bei dieser Untersuchungsreihe bestand der Apparat aus den folgenden, durch weite Glasröhren miteinander verbundenen Teilen.<sup>2)</sup>

Auf die für sich abschliessbaren, nebeneinander geschalteten Entwicklungsgefässe für Wasserdampf und Sauerstoff folgte ein mit I bezeichneter Ballon von etwa 10 Liter Inhalt, der dauernd mit dem rechten Schenkel des Manometers verbunden war. Darauf folgte, nach einem als Hahn dienenden Verschluss, Ballon II von ähnlicher Grösse und, nach einem weiteren Verschluss, Ballon III von nahe 0,8 Liter Inhalt. Hinter dem diesen Ballon absperrenden Verschluss befand sich eine automatische Quecksilberpumpe, die dauernd mit dem linken Schenkel des Manometers verbunden war und, daneben

1) Es mag hier zum Vergleich erwähnt werden, dass bei den Versuchen mit Sauerstoff sich zwar oft eine bis zu 0,005 mm gehende Aenderung der Ablesung während der Messung zeigte, diese aber in beiden Schenkeln die gleiche war und durch die Ausdehnung des Quecksilbers erklärt wird. Ausserdem traten zwischen den Messungen Aenderungen auf, die auf ein Ab- und Zudestilliren des Quecksilbers in dem meist sehr guten Vacuum hinweisen.

2) Vgl. Thätigkeitsbericht, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 21. p. 107. 1901.

geschaltet, aber durch Verschluss und eingeschliffenen Hahn absperrbar, eine Toepler'sche Pumpe.

Das Entwicklungsgefäss für Sauerstoff bestand aus einer Röhre von schwer schmelzbarem Glase, deren im stumpfen Winkel schräg abwärts gebogenes und verschlossenes Ende Quecksilberoxyd enthielt.

Die Ballons waren käufliche Gaswaschflaschen nach Drechsel; der die Zuleitungsröhren enthaltende eingeschliffene Stopfen wurde dadurch gedichtet, dass man den Hals der Flasche mit einem Papierring umgab und in die gebildete Wanne Quecksilber goss.

Die nach dem Vorgange Hagen's<sup>1)</sup> statt der Hähne benutzten Quecksilberverschlüsse hatten im allgemeinen die früher veröffentlichte Form<sup>2)</sup> aber zum Teil mit schräg gestellten Schenkeln und einer Sicherheitskugel. Bei grösseren Druckunterschieden wird dadurch allerdings nur bei einem sehr ruhigen Ausgleich des Druckes ein Wegschleudern des Quecksilbers verhütet; um dies sicher zu verhindern, wird man complicirtere Formen wählen müssen.

Das Manometer war mit einem früher benutzten identisch.<sup>3)</sup>

Die automatische Pumpe nach Sprengel's Princip will ich gesondert beschreiben; nur die Toepler'sche Pumpe enthielt ein Gefäss mit Phosphorsäure.

Die Verbindungsrohre waren nicht durchweg zusammengeschmolzen, sondern an einigen Stellen auch durch Siegellackkittungen miteinander verbunden.

Die Ballons standen in Sand eingebettet in grösseren Gefässen; nahe der Ballonwandung in den Sand gestossene, unten geschlossene und mit einem Wattepfropf versehene Röhren enthielten die zur Bestimmung der Ballontemperaturen dienenden Thermometer.

9. Das Princip der Versuche bestand darin, dass man den Apparat vollständig leer pumpete, durch Erhitzen des Quecksilberoxyds Sauerstoff entwickelte, der in den Ballon I trat, nach Messung des Druckes, diesen Sauerstoff auf die anderen

1) E. Bessel-Hagen, Wied. Ann. 12. p. 430. 1881.

2) M. Thiesen u. K. Scheel, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 3. p. 76. Fig. 2. 1900.

3) l. c. p. 76.

Ballons verteilte und nun untersuchte, ob sich das aus den gemessenen Drucken abgeleitete Verhältnis der drei Ballons unabhängig von dem Anfangsdruck ergab.

Die Messung und Berechnung der Drucke erfolgte wesentlich in früher beschriebener Weise<sup>1)</sup>, abgesehen davon, dass jetzt nur ein Beobachter die Einstellungen machte; der Nullpunkt des Manometers wurde mehrfach dadurch bestimmt, dass man die Ballons untereinander und mit der Pumpe communiciren liess.

10. Beim Beginn der Versuche mit Sauerstoff war in dem ganzen Apparat, das Entwicklungsgefäss einbegriffen, ein sehr gutes Vacuum vorhanden. Zu dessen Herstellung hatte bei den vorangehenden Versuchen mit Wasserdampf hauptsächlich die Toepler'sche Pumpe beigetragen; es genügte im wesentlichen schon, die Verbindung einige Zeit bestehen zu lassen, um den im Apparate befindlichen Wasserdampf zur Absorption durch die Phosphorsäure zu bringen. Später, als es sich um die Entfernung von Sauerstoff von geringer Dichte handelte, war aber die Toepler'sche Pumpe von geringem Nutzen, da nach jedem Pumpenzuge eine erhebliche Zeit verfloss, bis sich in der Pumpe wieder eine grössere Gasmenge ansammelte. Die Erklärung dafür liegt in der Verengerung der Zuleitung durch die Hahnbohrung, verbunden mit der der Maxwell'schen Theorie entsprechenden grossen Zähigkeit<sup>2)</sup> stark verdünnter Gase. Diese Pumpe diente daher jetzt hauptsächlich nur nach Hagen's Vorschlag als McLeod'sches Manometer, um den noch vorhandenen Gasdruck festzustellen, und wurde dazu frühestens 10 Minuten nach Herstellung der letzten Verbindung benutzt. Dass bei den grösseren Verdünnungen auch dieser Zeitraum für eine eigentliche Messung ungenügend war, zeigt die Ueberlegung, dass sich nach der Theorie bei einem Drucke von 0,001 mm in den Ballons innerhalb 10 Minuten nur derselbe Bruchteil dieses Druckes in der

1) M. Thiesen u. K. Scheel, *Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt* 3. p. 79—82. 1900.

2) Nämlich die von Stokes als „Reibungsindex“ bezeichnete Grösse, durch welche die Bewegung einer Flüssigkeit infolge der Reibung bedingt wird, und die nach Maxwell's Theorie des constanten Reibungscoefficienten der Dichte des Gases umgekehrt proportional ist.

Pumpe ausbilden konnte, wie bei Atmosphärendruck in 0,008 sec.

11. Ich lasse jetzt zunächst die mit einer zweiten Sauerstofffüllung beobachteten Drucke folgen, die auch meiner ersten Mitteilung an die Deutsche Physikalische Gesellschaft zu Grunde liegen.<sup>1)</sup> Der Anfangsdruck von 0,897 mm wurde sogleich in den verbundenen Ballons I und II hergestellt, dann die Gasmenge auf die drei Ballons verteilt und der neue Druck 0,861 mm gefunden. Man pumpte nun den Ballon III leer, füllte ihn (nach einer durch die Klammer angedeuteten Controlmessung, die nahezu denselben Druck ergab) wieder aus den anderen Ballons auf und fuhr so fort.

Nr.	Zeit der Messung		Druck mm	B-R
32	12. IV. 1901	10,6 <sup>a</sup>	0,897	—
{33		11,7	0,861	—2}
{34		13,7	0,860	—4}
{35		14,5	0,826	—5}
{36	13. IV. 1901	11,5	0,826	—5}
37		12,3	0,796	—4
{38		14,5	0,766	—4}
{39	15. IV. 1901	11,5	0,771	+1}
40		12,3	0,742	+1
{41		14,6	0,711	—2}
{42	16. IV. 1901	10,9	0,715	+2}
43		11,8	0,688	+2
44		14,2	0,661	0
45	17. IV. 1901	12,4	0,636	0
46	18. IV. 1901	10,9	0,612	0
47		13,9	0,588	—1
48	19. IV. 1901	11,5	0,567	—1
49		14,5	0,543	—3

Die in der zweiten Columne angegebenen Zeiten entsprechen der Mitte der etwa eine halbe Stunde dauernden Messung.

In der letzten Columne sind, in Einheiten der dritten Decimale, die Fehler angegeben, welche die beobachteten

1) Ein Referat darüber: Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 5. p. 8. 1901, ist ohne mein Zuthun veröffentlicht, lag mir aber in der Correctur vor.



Drucke unter der Voraussetzung übrig lassen, dass der erste Druck fehlerfrei beobachtet wurde und dass der gemeine Logarithmus der Drucke nach jeder Operation um 0,0166 abnahm. Dazu ist noch folgendes zu bemerken.

Die Drucke sind, abweichend von der vorläufigen Mittheilung, unter Annahme eines für die ganze Reihe constanten Schraubenwertes, inbegriffen die Capillarcorrection, und eines constanten Indexfehlers auf vier Stellen berechnet worden. An ihnen hätten noch einige Correctionen angebracht werden müssen: erstens wegen der Schwankungen der in den grossen Ballons zwischen  $17,1^{\circ}$  und  $17,5^{\circ}$  liegenden Temperatur, zweitens wegen der beim Auspumpen noch verbleibenden Gasreste, deren Druck, in der Toepler'schen Pumpe gemessen, nur einmal 0,0004 mm erreichte, drittens wegen der durch die verschiedenen Quecksilberstände in den Verschlüssen bedingten Schwankungen des Ballonvolumens. Da diese Correctionen die angegebenen Fehler nur um eine Einheit, den Charakter des Resultates gar nicht ändern konnten, so ist ihre Berechnung unterblieben, auch wurden die Drucke nicht auf absolute Werte reducirt.

Da nur Tagesbeobachtungen ausgeführt wurden, bei denen die Unruhe des Quecksilbers recht störend war, so ist die Grösse der übrigbleibenden Fehler, die noch durch andere Wahl der beiden Constanten etwas herabgesetzt werden kann, nicht gerade als unzulässig zu bezeichnen, zumal da auch der Indexfehler Aenderungen derselben Ordnung zeigt. Immerhin muss der Gang der Fehler, insbesondere der Sprung, der zwischen den beiden bei gleicher Dichte angestellten aber durch 45 Stunden voneinander getrennten Messungen Nr. 38 und Nr. 39 eingetreten zu sein scheint, als auffällig bezeichnet werden. Es lag nahe zu versuchen, ob die Einführung eines der Zeit proportionalen Gliedes, wie es ein stetiges Loslösen eines Gases von den Wänden oder eine kleine Undichtheit bedingen würde, eine Verbesserung bringt, doch wird eine solche in erheblichem Maasse nur erzielt, wenn man für die letzten sechs Beobachtungen eine Constante ändert. Ausserdem würde aber auch diese Hypothese ein grösseres logarithmisches Decrement verlangen, während sich aus den sogleich zu besprechenden Versuchen bei grösserem Druck ein kleineres ergibt.



12. Unmittelbar vor und nach den soeben besprochenen wurden noch die folgenden Messungen mit demselben Apparat ausgeführt.

Bei der ersten Füllung war im Ballon I ein Druck von 0,949 mm vorhanden gewesen, der durch Verteilung auf die Ballons I und II auf 0,502 mm herabgesetzt wurde. In genügender Uebereinstimmung damit fand man bei der dritten Füllung, dass der Druck von 22,911 mm auf 12,179 mm herabging; der Unterschied ist zwanzigmal kleiner und von entgegengesetztem Zeichen als ihn die Bohr'sche Anomalie fordern würde.

Ausserdem ergab sich bei der dritten und einer vierten Füllung, bei welcher der Druck in den Ballons I und II 22,4 mm war, dass bei einer Verteilung des Gases auf die drei Ballons der Logarithmus des Druckes um 0,0162 abnahm, also etwas weniger als bei der Berechnung der mit der zweiten Füllung angestellten Versuche vorausgesetzt war.

Bei der ersten Füllung hatte man den Druck von 0,502 mm durch Verteilung auf die drei Ballons in fünf Operationen noch weiter auf 0,431 mm herabgesetzt. Das ist eine zu kleine Abnahme, die Abweichung liegt am Anfang der Beobachtungen und hängt damit zusammen, dass aus einem nicht mehr aufzuklärenden Grunde der zu 0,0000 mm bestimmte Druck im Vacuum sich am folgenden Tage als nicht unerheblich erwies und, wie eine Controlmessung ergab, wahrscheinlich schon bei der vorangehenden Messung (vielleicht auch zum Teil bei den zu 0,949 und 0,502 mm gefundenen Drucken) in Höhe von über 0,01 mm bestanden hatte.

13. Die Versuche, welche entscheiden sollten, ob die kleinen in den vorangehenden Beobachtungen verbleibenden und die grösseren von anderen Beobachtern gefundenen Abweichungen vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze ihre Ursache zum Teil in dem Einflusse der Wände haben könnten, wurden mit einem etwas veränderten Apparate angestellt. Der frühere Ballon II wurde entfernt, der frühere Ballon III, nachdem man das auf den Boden gehende Rohr verkürzt hatte, lose mit 12,1 g nicht weiter behandelter Glaswolle von etwa 0,02 mm Fadendurchmesser gefüllt; seine Oberfläche verhielt sich also jetzt zu seinem Inhalt wie bei einem etwa 6 mm weiten Rohr. Ausser-

dem wurden auch die Abbildungsverhältnisse der Mikroskope durch Entfernung der Blenden und durch neue Justirung geändert; bei der Berechnung ist diese Aenderung aber nur durch Annahme der neu bestimmten mittleren Schraubenwerte berücksichtigt worden.

Ausser den beiden Ballons benutzte man bei diesen Versuchen auch den Raum, welcher (nach Absperrung der Toepler'schen Pumpe) von einem genügend constant bleibenden Teile der automatischen Pumpe, von dem linken Manometerschenkel und von den Verbindungsröhren gebildet wurde. Man erreichte dadurch den Vorteil, den Index häufiger inmitten einer Reihe bestimmen zu können, ausserdem aber auch den, neben dem Verhalten des in den mit Glaswolle gefüllten Ballon einströmenden auch das des aus diesen Ballon austretenden Gases untersuchen zu können.

Die Ergebnisse dieser Messungen sind in der p. 297 u. 298 folgenden Tabelle aufgeführt. Dazu ist folgendes zu bemerken.

Die Drucke sind hier noch mit dem Indexfehler  $i$  behaftet angeführt; ebenso sind alle Bestimmungen von  $i$  angegeben. Bei der Berechnung ist für  $i$  sein mittlerer Wert 0,0152 angenommen.

Die Art wie die Verteilung des Gases auf die einzelnen Räume stattfand, war bei diesen Versuchen nicht ganz nach einem einheitlichen Schema geregelt und ist daher in der vorletzten Columne besonders angegeben. Bezeichnen wir das Volumen des grossen Ballons mit 1, das des kleineren die Glaswolle enthaltenden Ballons mit  $\alpha$ , den dritten Raum mit  $\beta$ , so bedeutet das Zutreten des Factors  $x = 1/1 + \alpha$ , dass das Gas aus dem Ballon 1 auf die beiden Ballons 1 und  $\alpha$  verteilt wurde;  $y = 1/1 + \alpha + \beta$  entspricht einer Verteilung auf die drei Ballons. Endlich ist  $z = \alpha/\alpha + \beta$  gesetzt.

Nach den ersten acht Beobachtungen trat ein Unfall durch Bruch des Fallrohres der automatischen Pumpe ein, dabei wurde auch etwas Quecksilber in den mit Glaswolle gefüllten Ballon geschleudert. Das Fallrohr wurde dann, ohne im übrigen etwas an den Verbindungen zu ändern, in einer Weise reparirt, dass ein ähnlicher Unfall jetzt mit Sicherheit ausgeschlossen zu sein scheint. Nachdem der Apparat dann aufs neue leergesaugt und Sauerstoff entwickelt war, wurden die Beobachtungen Nr. 9—27 ausgeführt.

Nr.	Zeit der Messung	Ergebnis	Art des Druckes	B-R
1	15. VI. 1901 11,6 <sup>h</sup>	0,019 mm	$i$	+ 4
2	13,1	1,012	$i + p$	0
3	13,8	0,935	$i + p x$	+ 3
4	14,5	0,013	$i$	- 2
5	17. VI. 1901 10,9	0,905	$i + p y$	- 3
6	11,9	0,895	$i + p x y$	0
7	12,6	0,015	$i$	0
8	14,1	0,213	$i + p y^2 (1-x)$	- 1
9	21. VI. 1901 10,5	0,015	$i$	0
10	11,5	0,993	$i + p_1$	0
11	12,2	0,928	$i + p_1 x$	- 1
12	13,8	0,864	$i + p_1 x^2$	- 6
13	14,5	0,016	$i$	+ 1
14	22. VI. 1901 10,4	0,842	$i + p_1 x y$	- 10
15	11,2	0,794	$i + p_1 x^2 y$	- 4
16	11,9	0,203	$i + p_1 x^2 y (1-x)$	- 8
17	12,5	0,011	$i$	- 5
18	14,0	0,771	$i + p_1 x y^2$	- 10
19	14,6	0,721	$i + p_1 x^2 y^2$	- 10
20	24. VI. 1901 10,5	0,727	$i + p_1 x^2 y^2$	- 4
21	11,6	0,685	$i + p_1 x^3 y^2$	0
22	12,3	0,178	$i + p_1 x^3 y^2 (1-x)$	- 5
23	13,0	0,015	$i$	0
24	25. VI. 1901 11,0	0,677	$i + p_1 x^3 y^2$	+ 7
25	11,8	0,631	$i + p_1 x^3 y^2$	+ 3
26	12,7	0,165	$i + p_1 x^3 y^2 (1-x)$	- 3
27	13,3	0,014	$i$	- 1
28	26. VI. 1901 10,9	1,938	$i + p_2$	+ 1
29	11,1	0,467	$i + p_2 (1-x)$	+ 4
30	11,5	0,807	$i + p_2 (1-x^2)$	+ 1
31	11,8	1,064	$i + p_2 (1-x^2)$	- 4
32	12,2	1,268	$i + p_2 (1-x^4)$	- 2
33	12,6	1,425	$i + p_2 (1-x^2)$	0
34	12,9	1,543	$i + p_2 (1-x^2)$	- 1
35	13,4	1,638	$i + p_2 (1-x^2)$	+ 4
36	13,8	1,705	$i + p_2 (1-x^2)$	0
37	14,1	1,937	$i + p_2$	- 1
38	14,3	1,757	$i + p_2 (1-x^2)$	- 2
39	14,4	0,018	$i$	+ 2
40	27. VI. 1901 10,8	1,772	$i + p_3$	0
41	11,1	0,429	$i + p_3 (1-x)$	+ 4

Nr.	Zeit der Messung	Ergebnis	Art des Druckes	B-R
42	27. VI. 1901 11,5 <sup>b</sup>	0,743 mm	$i + p_3(1 - x^2)$	+ 5
43	12,0	0,975	$i + p_3(1 - x^3)$	- 3
44	12,3	1,159	$i + p_3(1 - x^4)$	- 4
45	12,7	1,301	$i + p_3(1 - x^5)$	- 3
46	13,1	1,412	$i + p_3(1 - x^6)$	- 1
47	13,5	1,494	$i + p_3(1 - x^7)$	- 2
48	13,9	1,559	$i + p_3(1 - x^8)$	- 1
49	14,3	1,772	$i + p_3$	0
50	14,4	1,612	$i + p_3(1 - x^9)$	+ 3
51	14,6	0,019	$i$	+ 3

Die letzten Beobachtungen Nr. 28—51 wurden in etwas abweichender Weise angestellt. Man entwickelte in den beiden Ballons Sauerstoff und bestimmte seinen Druck (zu 1,9232 mm). Dann sperrte man die Ballons voneinander ab, liess das Gas aus dem mit Glaswolle gefüllten Ballon auch in den dritten Raum treten und bestimmte die Druckdifferenz (zu 0,4517 mm). Jetzt pumpte man den dritten Raum leer, füllte ihn wieder aus dem mit Glaswolle gefüllten Ballon auf und bestimmte aufs neue die Differenz des Druckes gegen das im grossen Ballon unverändert gebliebene Gas. So fuhr man fort, bis nach neun Operationen der Druck auf weniger als ein Zehntel des Anfangsdruckes gesunken war. Eine zweite ganz gleiche Reihe wurde ausgeführt, nachdem man den mit Glaswolle gefüllten Ballon durch Verbindung mit dem grossen Ballon wieder aufgefüllt hatte.

Bei diesen Beobachtungen Nr. 28—51 war ausserdem das den kleineren Ballon umgebende Sandbad entfernt und durch ein Eisbad ersetzt worden, das diesen Ballon sehr nahe bei 0° erhielt.

Ferner waren hier die Messungen dadurch sehr vereinfacht, dass man die Bestimmung des Schraubenwertes fortliess, bei der Berechnung vielmehr den aus den 27 vorhergehenden Messungen folgenden Mittelwert benutzte und die Zahl der anderen Einstellungen auf die Hälfte beschränkte. Da auch die leer zu pumpenden Räume jetzt viel kleiner waren, so konnten die einzelnen Messungen rasch auf-

einander folgen und eine Reihe konnte in einem Tage erledigt werden.

14. Bei der Berechnung der Versuche bei denen eine grössere Oberfläche vorhanden war, ergab sich für die ersten acht Versuche, welche aber den für die Anomalie maassgebenden Druck von 0,7 mm nicht erreichen, eine genügende Uebereinstimmung, wenn man den Anfangsdruck als richtig voraussetzte, ferner

$$\log x = -0,03675,$$

$$\log y = -0,04824,$$

und daraus folgend

$$\log(1-z) = -0,60466$$

annahm. Die übrigbleibenden Fehler sind in der letzten Columne der Tabelle angegeben.

Dagegen zeigt die zweite Reihe, welche Nr. 9 bis Nr. 27 umfasst, eine Anzahl von auffallenden Abweichungen, für die mir die Erklärung fehlt. Berechnet sind die übrigbleibenden Fehler dieser Reihe mit den Constanten

$$\log x = -0,02914,$$

$$\log y = -0,03846,$$

$$\log(1-z) = -0,60112.$$

Auffallend ist hier schon die auch für gleiche Drucke angezeigte Aenderung der Constanten gegen die vorige Reihe, welche eine relative Vergrösserung des grossen Ballons erfordern würde und in ihrem Betrage weder durch Temperaturunterschiede oder Aenderungen in den Verschlüssen noch durch die geringe Menge des inzwischen in den kleinen Ballon getretenen Quecksilbers erklärt wird. Aber auch bei Berechnung mit diesen Constanten bleiben noch sehr grosse durch Beobachtungsfehler und die vernachlässigten Correctionen nicht zu erklärende Abweichungen übrig. Besonders auffallend ist die einer früheren Beobachtung entsprechende Druckvermehrung bei gleichbleibender Dichte nach längerer Pause zwischen Nr. 19 und Nr. 20. Ferner die sehr geringe Druckänderung

zwischen Nr. 21 und Nr. 24. Hier findet etwas der Bohr'schen Anomalie ähnliches, wenn auch nur im zehnten Teil des Betrages statt: die Druckänderung entspricht nur der Hälfte der Dichteänderung. Gegenüber den Abweichungen, welche diese Reihe überhaupt zeigt, ist aber darauf kein Gewicht zu legen.

Hervorheben möchte ich noch, dass bei dieser Reihe mit ihren stärkeren Abweichungen das Gas im Apparate wahrscheinlich am wenigsten rein war. Vor der Entwicklung des Sauerstoffs betrug der Druck im Apparate noch 0,008 mm nach Messung an der Toepler'schen Pumpe; es mögen daher im grossen Ballon oder auch im Quecksilberoxyd noch Spuren von Feuchtigkeit zurückgeblieben sein.

Die Temperatur war ziemlich constant nahe bei 16,5°.

Die Berechnung der beiden letzten Reihen zeigt wieder mit Rücksicht auf die jetzt etwas grösser zu erwartenden Beobachtungsfehler eine gute Uebereinstimmung und keine Spur der Anomalie, obgleich gerade hier die Bedingungen für ihr Auftreten, falls sie von den Wänden herrührt, besonders günstig schienen. Der Sprung hätte zwischen Nr. 31 und Nr. 32 und zwischen Nr. 43 und Nr. 44 eintreten müssen.

Man berücksichtigte hier den Umstand, dass sich der dritte Raum infolge des Quecksilberstandes im Manometer systematisch mit dem Drucke etwas ändern musste und legte daher der Berechnung beider Reihen den Wert zu Grunde

$$\log z = -0,11548 + 0,00070 p,$$

wo  $p$  den Druck in Millimetern bezeichnet. Bei Vergleichung mit den früher bestimmten Werten von  $z$  ist zu berücksichtigen, dass jetzt der grösste Teil der beiden verglichenen Räume sich auf einer um 17° verschiedenen Temperatur befand.

Die Werte der beiden Anfangsdrucke  $p_2$  und  $p_3$  sind als unabhängig voneinander beobachtet angenommen, obgleich man sie auch aufeinander hätte zurückführen können.

15. Fasst man nun alles, was über das Verhalten des Sauerstoffs in der Nähe des Druckes von 0,7 mm bekannt geworden ist, zusammen, so wird wohl der folgende Schluss gerechtfertigt erscheinen:

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Anomalie, welche Sauerstoff bei einem Drucke von etwa 0,7 mm zeigen soll, nicht existirt, dass vielmehr Versuchs- und Messungsfehler zu ihrer Annahme geführt haben.

Keinesfalls ist diese Anomalie eine stets oder unter bekannten Bedingungen in bestimmter Grösse auftretende Erscheinung.

(Eingegangen 1. August 1901.)

**5. Ueber die innere Reibung von Helium  
und ihre Aenderung mit der Temperatur;  
von H. Schultze.**

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut zu Halle a/S.)

Ueber die innere Reibung von *Helium* liegen Messungen von Lord Rayleigh vor. Er fand bei gewöhnlicher Temperatur als Reibungscoefficienten von *nicht ganz reinem Helium*<sup>1)</sup> den auf trockene Luft bezogenen Wert 0,96<sup>2)</sup> und später für *reines Helium*<sup>3)</sup> als bestimmend für die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur in den Grenzen 15° und 100° die Werte  $n = 0,681$  und  $C$  (Sutherland) = 72,2.<sup>4)</sup> Lord Rayleigh's Reibungsversuche sind, wie ich in meiner Arbeit über die innere Reibung von Argon ausgeführt habe<sup>5)</sup>, nicht einwandfrei. Daher unternahm ich es auf Anregung von Hrn. Prof. Dorn, mit dem von mir zur Untersuchung von Argon construirten, sehr genau arbeitenden Apparat den Reibungscoefficienten von Helium und seine Aenderung mit der Temperatur, und zwar in den Grenzen 15° und 184° zu bestimmen. Leider konnte ich kein vollkommen reines Helium darstellen (vgl. p. 308). Wenn daher auch meine Resultate nicht als endgültige angesehen werden können, so möchte ich sie doch mittheilen, weil ich merkwürdigerweise für reineres Helium, als es Rayleigh damals zur Verfügung stand, einen über 10 Proc. grösseren Reibungscoefficienten fand, während die von mir be-

1) Das Helium hatte Ramsay in London dargestellt (Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 59. p. 205. 1896). Die Dichte ist nicht angegeben. Ramsay fand im Mittel die Dichte des (unreinen) Heliums aus verschiedenen Mineralien zu 2,15 bezogen auf O = 16. (W. Ramsay, Proc. Roy. Soc. 59. p. 329. 1896.)

2) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 59. p. 206. 1896.

3) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 67. p. 187—189. 1900; Beibl. 24. p. 968. 1900.

4) Lord Rayleigh, l. c.

5) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 140. 1901; Inaug.-Diss. p. 5. Halle 1901.



stimmten Werte von  $n$  und  $C$  (Sutherland) mit den nach Rayleigh für reines Helium geltenden nahe übereinstimmen.

### I. Darstellung von Helium.

### a) Darstellung von Rohhelium.

Das Rohhelium wurde durch Ausglühen von *Monazitsand* gewonnen, den Hr. Dr. Knöfler zu diesem Zwecke dem hiesigen *Physikalischen Institut* zur Verfügung gestellt hatte. Bei der Darstellung war besonders darauf zu achten, dass das Gas durch keine merklichen Mengen Luft und infolge dessen Argon verunreinigt wurde, da dieses sowie Neon, Krypton, Xenon auf chemischem Wege nicht zu entfernen ist. Als zweckmässig ergab sich die in Fig. 1 angegebene Anordnung des Apparates.

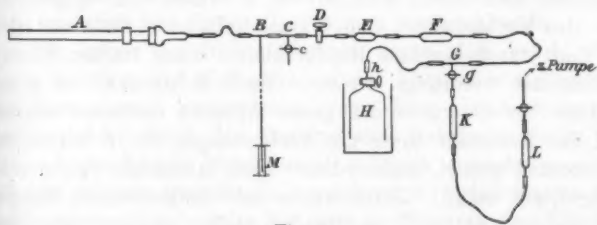


Fig. 1.

*A* ist ein 90 cm langes, 3,5 cm weites nahtloses Eisenrohr, an dem einen Ende zugeschweisst, am anderen Ende mit einem luftdicht aufschraubbaren Verjüngungsstück aus Rotguss versehen. Es wurde, soweit es sich im Gasofen befand, mit Monazitsand (zuvor gesiebt und getrocknet) beschickt, während der herausragende, kühl gehaltene Teil geglähten Asbest enthielt. *B* ist ein T-Stück aus 1,5 mm weitem Capillarrohr, dessen senkrecht nach unten gehender, 90 cm langer freier Schenkel in dem 10 cm hohen Quecksilbercylinder *M* endigte, *C* ein T-Stück, das durch den Glashahn *c* mit einem Kipp'schen Wasserstoffentwicklungsapparat in Verbindung stand, vor welchem zum Reinigen und Trocknen des Wasserstoffs zwei Waschflaschen mit übermangansaurem Kali (in Wasser gelöst) und concentrirter Schwefelsäure sowie ein Trockenrohr mit Phosphorpentoxyd lagen. Der Glashahn *D*, die mit Natron-

kalk gefüllte Röhre *E*, das Verbrennungsrohr *F* mit Kupferoxyd im kleinen Gasofen und das T-Stück *G*, das durch den Hahn *g* und zwei Natronkalk bez. Natronkalk und Phosphor-pentoxyd enthaltende Glasrohre *K* und *L* mit der Geissler'schen Quecksilber-Hahnluftpumpe in Verbindung stand, führte sodann zum Hahn *h* des Glasgasometers *H*. Dieser fasste etwa 1 Liter Gas. Als Sperrflüssigkeit diente destillirtes, ausgekochtes Wasser. Die Verbindungen der einzelnen Teile des Apparates wurden durch Bleirohr und kurze dickwandige Gummischlauchstücke (mit Gummischnur befestigt) hergestellt.

Der Verlauf der Operationen war folgender. Die Glasglocke wurde bis zum Hahn *h* mit dem Sperrwasser gefüllt. Dann wurden alle Verbindungen bis zu den Hähnen *h* und *c* mit der Geissler'schen Pumpe evacuirt<sup>1)</sup>, der Hahn *D* geschlossen und durch Oeffnen von *c* Wasserstoff eingelassen. Aus den Verbindungen vom Wasserstoffapparat bis *c* war zuvor die Luft durch längeres Hindurchleiten eines starken Wasserstoffstromes verdrängt worden. Nach Schliessen von *c* und Oeffnen von *D* wurde der ganze Apparat nochmals evacuirt und das Eisenrohr sowie die Verbindungen bis *D* wieder mit Wasserstoff gefüllt, sodass dieser nach Abschluss von *c* unter Ueberdruck stand. Jetzt wurde bei fortgesetztem Pumpen das Kupferoxyd in *F* auf Dunkelrotglut erhitzt. Als gutes Vacuum erreicht war, wurde der Hahn *g* abgeschlossen und das Eisenrohr im Gasofen erhitzt, wodurch die im Monazitsand enthaltenen Gase, hauptsächlich *Kohlensäure*, *Wasserstoff*, *Helium* und, wie sich leider später herausstellte, jedenfalls auch *Neon*, ausgetrieben wurden. Dazu kamen durch das glühende Eisenrohr hindurchdiffundirende Gase, *Wasserstoff* und *Kohlenoxyd*. Als der Ueberdruck in dem durch *D* abgeschlossenen Raume

1) Das Eisenrohr war vor Beginn der Operationen unter starkem Ueberdruck auf Dichtigkeit geprüft worden. Volles Vacuum, soweit es die Geissler'sche Pumpe liefert, wurde übrigens nicht erreicht. Es mag dahingestellt bleiben, ob dies in einer kleinen Undichtheit des Eisenrohres oder in Gasentwicklung aus dem Monazitsand zu erklären ist. Jedenfalls waren die übrigbleibenden Gasblasen so klein, dass im Falle einer Undichtheit die Gefahr, eine grössere Menge Luft und infolge dessen eine merkliche Menge Argon in die Verbindungen zu bekommen, nicht vorlag.

etwa 8 cm Hg erreicht hatte, was das Austreten von Gasblasen in *M* anzeigte, wurde der Hahn *D* vorsichtig geöffnet, sodass im Eisenrohr Ueberdruck blieb, und es traten die Absorptionsapparate in Thätigkeit. Der Natronkalk in *E* absorbierte Kohlensäure, das Kupferoxyd in *F* Wasserstoff und Kohlenwasserstoffe. Als sich nach einigen Minuten so viel Rohhelium entwickelt hatte, dass wieder 8 cm Hg-Druck vorhanden war, wurde der Hahn *h* zum Gasometer geöffnet und in diesem ein grosser Teil des bei etwa  $\frac{3}{4}$  Stunde Erhitzen freiwerdenden Rohgases unter Ueberdruck aufgenommen. Nach Abschluss von *h* wurde der in den Zuleitungen befindliche Rest durch Öffnen von *g* (nur einige Secunden) in die evacuirt. Pumpe genommen, von wo er mit Hülfe des zur Pumpe gehörigen, zu diesem Zwecke etwas modificirten Gasentbindungsrohres in den Gasometer *H* befördert wurde. Eine Verunreinigung durch Luft war auch bei diesen Operationen ausgeschlossen.

Ein später angestellter Versuch ergab, dass bei  $\frac{3}{4}$  stündigem Erhitzen auf Hellrotglut in der That alles Helium aus dem Monazitsand ausgetrieben war. Eine kleine Menge von dem geglühten Sand, der übrigens eine stahlgraue Farbe hat, während der frische Monazitsand goldgelb aussieht, gemischt mit dem gleichen Gewicht Kaliumdichromat (vorher geschmolzen und zerrieben)<sup>1)</sup> gab beim Erhitzen im Vacuum der Töppler-Hagen-Pumpe keine Spur Helium mehr ab.

Zur Füllung eines Gasometers (1 Liter Inhalt) waren fünf Portionen Monazitsand von je 2 kg nötig. Es wurden zwei Gasometer voll Rohhelium dargestellt.

Das Kupferoxyd in *F* wurde nach Verarbeitung jeder Portion, der Natronkalk in *E* nach Verarbeitung jeder zweiten oder dritten Portion erneuert.

#### b) Reinigung des Rohheliums.

In dem Rohhelium waren folgende Verunreinigungen zu vermuten: Kohlensäure, Wasserstoff, Kohlenwasserstoffe und möglichenfalls Spuren von Stickstoff. Diese Verunreinigungen zu entfernen, wurde die in Fig. 2 angegebene endgültige Anordnung getroffen.

1) H. Erdmann, Lehrb. d. anorg. Chem. II. Aufl. p. 209. 1900.

*B*, *F* und *N* sind Verbrennungsrohre aus Glas in kleinen Gasöfen, und zwar enthält *B* die Maquenne'sche Mischung<sup>1)</sup> zur Beseitigung von etwaigem Stickstoff, *F* Bleichromat zur Aufnahme von Kohlenwasserstoffen und im Wasserstoffstrom geglühte metallische Kupferspiralen zur Beseitigung von aus dem Bleichromat sich entwickelndem Sauerstoff, *N* Kupferoxyd zur Beseitigung von Wasserstoff und etwaigen Resten von Kohlenwasserstoffen. *A*, *D*, *G*, *J* sind Trockenrohre mit Natronkalk und Phosphorpentoxyd, *C* ein U-Rohr mit reiner concentrirter Schwefelsäure auf Bimsstein (vorher geglüht) zur Beseitigung von Ammoniak aus der Maquenne'schen Mischung, *P* ein Rohr mit Natronkalk zur Aufnahme von Kohlensäure. Die

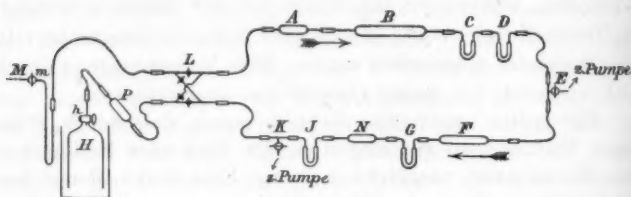


Fig. 2.

Hähne<sup>2)</sup> *E* und *K* können mit der Töpler-Hagen-Pumpe verbunden werden. *H* mit dem Hahn *h* ist der das Rohhelium enthaltende Gasometer, *M* mit dem Hahn *m* die Gaspipette nach Salet zur Aufnahme des Heliums. Schliesslich ist *L* das früher von mir beschriebene Röhrensystem mit vier Hähnen<sup>3)</sup>, das ein mehrmaliges Hin- und Herdrücken des Gases durch den Apparat von *H* zu *M* und umgekehrt immer in der Pfeilrichtung gestattete.

Als Verbindungen der einzelnen Teile des Apparates dienten wieder Bleirohre und kurze Stücke dickwandigen Gummischlauches, die mit Gummifäden befestigt wurden.

Der Verlauf der Operationen war folgender. Es wurde das ganze Röhrensystem bis zu den Hähnen *m* und *h* mittels der an *E* angelegten Töpler'schen Pumpe längere Zeit scharf

1) W. Hempel, Gasanalyse III. Aufl. p. 149. 1899.

2) Sämtliche Gashähne und Schiffe wurden mittels einer Wach-Vaselin-Mischung, die bekanntlich keine Dämpfe abgibt, gedichtet.

3) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 158. 1901.

evacuirt, die Maquenne'sche Mischung bis zur Dunkelrotglut erhitzt und das sich daraus entwickelnde Gas zuerst mit einer gutwirkenden Stiefelluftpumpe, vor welcher eine Waschflasche mit concentrirter Schwefelsäure lag, später, als nur noch geringe Gasentwicklung vorhanden, mit der Töpler'schen Pumpe abgepumpt. Als nach etwa 2 Stunden keine merkliche Gasentwicklung mehr eintrat, wurden die Verbrennungsrohre *F* und *N* erhitzt (das erstere nicht zu stark, um lebhaftes Sauerstoffentwicklung aus dem Bleichromat zu vermeiden) und wieder gepumpt, bis volles Vacuum vorhanden war. Jetzt wurde *E* abgeschlossen und das Gas 13 mal in der Pfeilrichtung durch den Apparat gedrückt.

Zu bemerken ist, dass das Rohhelium aus dem einen Gasometer vor den beschriebenen Operationen in einer Anordnung gereinigt war, die sich von der obigen nur dadurch unterschied, dass das Verbrennungsrohr *F* Kupferoxyd und *N* Bleichromat enthielt. Das Gas war so durch etwas Sauerstoff aus dem Bleichromat verunreinigt worden. Bei Beginn der endgültigen Reinigung befand es sich in der Gaspipette *M* und wurde mit dem Rohhelium aus dem anderen Gasometer zusammen gereinigt.

Am Schluss der Operationen war die 500 ccm fassende Gaspipette mit Helium gefüllt. Das in den Zuleitungen enthaltene reine Gas wurde durch den Hahn *K* in die Töpler'sche Pumpe genommen und von hier in kleine Glasgasometer gebracht.

## II. Analyse des Heliums.

Das Helium aus der Gaspipette wurde in einer Geissler'schen Röhre, die vor Einlassen des Heliums vollkommen grün erschien und nur die Quecksilberlinien zeigte, mit dem kleinen Spectralapparat des Institutes untersucht. Ich gebe die Lagen der vorhandenen Linien bei 7,5 mm Druck in Scalenteilen der Vergleichsscala an, deren 100. Scalenstrich auf die Natriumlinie eingestellt war. Darunter theile ich die entsprechenden Wellenlängen in Ångström'schen Einheiten mit.

76,2	{ (sehr schwach)	82,6	100,5	118,7	124	{ (leise Spur einer Bande)
7057		6678	5876	5461	5201	
		131,2	132,8	137,7	150,2	167,6
		5049	5016	4922	4713	4472

Rechts und links von der äusserst hellen gelben Heliumlinie (100,5) zeigten sich von 90 bis 110 eine Menge feiner gelber Linien, die jedenfalls durch Diffraction und Reflexion zu erklären sind.

5461 ist die dritte Quecksilberlinie. Nach der Tabelle von Liveing und Dewar<sup>1)</sup> entsprechen den angegebenen Linien folgende Gase (die in Klammern angegebenen Zahlen sind die dort angegebenen Wellenlängen):

7057	? (7058)	5016	He (5015,7)
6678	Ne (6678,4)	4922	He (4922,1)
5876	He (5875,9)	4713	Ne (4715,4710)
5049	He (5047,8)	4472	He (4471,6)

Die Bedeutung der Linie 7057, die früher dem *Argon* zugeschrieben wurde, ist danach nicht bekannt. Zweifelhaft erscheint es mir, dass die rote Linie 6678 dem *Neon* angehören soll, weil sie sehr hell ist und bei scharfem Evacuiren bis zuletzt sichtbar bleibt, während *Neon* nur in kleinen Mengen in dem Gase vorhanden sein kann. Eine endgültige Entscheidung darüber wird sich erst geben lassen, wenn die durch Ramsay<sup>2)</sup> angekündigten Aufnahmen des Spectrums von reinem *Neon* von Baly veröffentlicht sein werden.

Bei 2,7 mm Druck erschien dasselbe Spectrum, nur etwas lichtschwächer.

*Das Helium enthielt also jedenfalls etwas Neon.* H, N und O waren sicher nicht vorhanden; Ar aus der Luft war durch die Anordnung der oben beschriebenen Apparate ausgeschlossen.

Zwei vor Anfang und nach Schluss der Reibungsversuche gemachte genaue Dichtebestimmungen (jede an zwei Waagen) ergaben bezogen auf O = 16:

$$(1) \quad D_{\text{He}} = 2,106 \pm 0,009,$$

$$(2) \quad D_{\text{He}} = 2,063 \pm 0,005,$$

woraus im Mittel:

$$D_{\text{He}} = 2,084.$$

Bezogen auf Wasser gleich 1 ist im Mittel:

$$D_{\text{He}} = 0,0001862.$$

1) G. D. Liveing u. J. Dewar, Proc. Roy. Soc. 67. p. 467—475. 1901.

2) W. Ramsay u. M. Travers, Zeitschr. f. Physik. Chem. 35. p. 634. 1900.

Die Dichte des reinen Neons ist nach Ramsay und Travers<sup>1)</sup> auf  $O = 16$  bezogen:

$$D_{Ne} = 9,97$$

und die Dichte des reinen Heliums:

$$D_{He} \text{ (rein)} = 1,98.$$

Das Gas enthielt danach 1,25 Volumenprocente Neon. Die Befreiung des Heliums von Neon wäre vielleicht mit Hülfe von flüssigem Wasserstoffe möglich gewesen. Ich musste jedoch vorläufig auf einen solchen Versuch verzichten, da die Universität Halle die dazu notwendigen Apparate nicht besitzt.

### III. Reibungsversuche mit Helium.

Der bei der Argonuntersuchung benutzte Reibungsapparat wurde unverändert beibehalten.<sup>2)</sup> Es galten also für alle Teile dieselben Constanten und Correctionen wie früher. Die Beobachtungsmethode war dieselbe wie bei den Versuchsreihen mit Argon. Die Manometer wurden kurz vor Beginn der Versuche neu graduirt; ihre Nulllagen waren nach deren Schluss nicht geändert. Auf Inrechnungsetzung der Temperaturänderungen der Manometer wurde verzichtet, da dadurch die Endresultate nicht geändert würden.

Als Gleitungscoefficient wurde die theoretisch gleichgrosse Weglänge in Rechnung gesetzt, die sich nach den Formeln der kinetischen Gastheorie<sup>3)</sup> aus  $D_{He} = 0,0001862 \eta'_0$  (ohne Berücksichtigung der Gleitung)  $= 1871 \cdot 10^{-7}$  als  $L = 0,0000276$  cm ergibt.

Um zu prüfen, ob der Apparat richtige Werte liefert, wurden vor wie nach der Versuchsreihe mit Helium je zwei Versuche mit trockener Luft angestellt. Es ergab sich im Mittel  $\eta' \cdot 10^7 = 1790$  bei  $12,9^\circ$ ,  $= 1800$  bei  $15,0^\circ$ , was mit dem früher von mir bestimmten Werte  $\eta' \cdot 10^7 = 1802$  bei  $15,0^\circ$ <sup>4)</sup> sehr gut übereinstimmt.

Was die Bezeichnungen der Tabelle anbetrifft, so verweise ich betreffs ihrer Bedeutung und ihres Zusammenhanges

1) l. c.

2) H. Schultz, Ann. d. Phys. 5. p. 141 ff. 1901.

3) O. E. Meyer, Kinet. Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 56 u. 189. 1899.

4) H. Schultz, Ann. d. Phys. 5. p. 157. 1901.



auf die Argonuntersuchung. Zur sofortigen Orientirung bemerke ich hier, dass  $T'$  die Temperatur bedeutet, für welche der Reibungscoefficient ( $\eta'$  ohne,  $\eta$  mit Berücksichtigung der Gleitung) gültig ist. Hinter jeder Versuchsreihe habe ich den Relativwert bezogen auf trockene atmosphärische Luft angegeben.

Ich fand bei  $15,0^\circ$   $\eta_{\text{He}} = 1,086 \eta_{\text{Luft}}$ , während Rayleigh 0,96 als Relativwert angiebt. Sein Wert ist also um 10 Proc. zu klein, wie ich schon oben bemerkte. Rayleigh's Versuchs-anordnung erklärt, wie seine Resultate über Argon beweisen, die mit den meinigen fast übereinstimmen, so grosse Fehler nicht. Es bleibt also nur übrig anzunehmen, dass das damals von Rayleigh benutzte Helium, über dessen Spectrum und Dichtigkeit er nichts angiebt, starke Verunreinigungen enthielt, die den Reibungscoefficienten kleiner machten. Unter der Annahme, dass nicht *Neon*, sondern *Argon* ( $\frac{1}{2}$  Proc.) die Verunreinigung in dem von mir untersuchten Gase ist, ergibt die Puluj'sche Formel<sup>1)</sup> für Gasgemische, dass der Reibungscoefficient des Gases etwa 1 Proc. grösser ist als der des reinen Heliums. Für *Neon* lässt sich die Rechnung nicht führen, weil sein Reibungscoefficient unbekannt ist; doch ist eine viel grössere Abweichung nicht zu vermuten. Ich glaube also annehmen zu dürfen, dass sich der Reibungscoefficient des reinen Heliums von dem von mir bestimmten um höchstens 1—2 Proc. unterscheidet.

Betreffs der Abhängigkeit der Reibung von Helium von der Temperatur ergibt sich aus meinen Beobachtungen, falls man  $\eta_\phi = \eta_0 (1 + \alpha \vartheta)^n$  setzt, für je zwei aufeinanderfolgende Temperaturen:

$\vartheta$	$\eta \cdot 10^7$	$n$
15,3	1969	
99,6	2348	0,6852
184,6	2699	0,6771

Nach der Formel von Sutherland<sup>2)</sup> ergibt die Methode der kleinsten Quadrate aus den drei beobachteten  $\eta_\phi$

$$\eta_0 = 1891 \cdot 10^{-7}, \quad C = 80,3.$$

1) O. E. Meyer, Kinet. Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 203. 1899.

2) O. E. Meyer, l. c. p. 168 u. 211.



Versuche mit Helium

Nr.	$T$	$P_1$ (P <sub>1</sub> )	$P_2$ (P <sub>2</sub> )	$P_3$ (P <sub>3</sub> )	$P_4$	$\eta$	$M$	$\eta \cdot 10^5$	$\eta \cdot 10^5$	Datum	Zeit des Beginnes
1	R 15,3	3,027	11,028	75,084	2100	366,59	1955	—	—	30./III.	2 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 12,5 <sup>s</sup>
2	L 15,6	2,981	11,003	74,994	2100	366,76	1954	—	—	"	4 13 20,0
3	R 15,9	3,027	11,028	74,925	2100	368,13	1943	—	—	"	5 26 15,5
4	L 15,8	2,981	11,003	74,960	1500	264,45	1938	—	—	"	6 36 50,5
5	R 14,6	3,027	11,028	74,830	2100	367,91	1940	—	—	31./III.	8 22 50,5
6	L 14,6	2,981	11,003	74,826	2100	370,16	1933	—	—	"	9 34 44,0
7	R 15,5	3,027	11,028	75,559	2100	364,80	1943	—	—	3./IV.	12 1 18,0
8	L 15,4	2,981	11,003	75,570	2100	368,01	1934	—	—	"	3 6 51,0
9	R 15,3	3,027	11,028	75,508	2100	366,06	1941	—	—	"	4 26 40,0
$\eta_{\text{He}} = 1,086 \cdot \eta_{\text{Luft}}$ bei 15,0°.											
10	R 99,6	3,027	11,028	74,749	2400	270,56	2833	—	—	31./III.	11 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 1,5 <sup>s</sup>
11	L 99,6	2,981	11,003	74,712	2400	274,43	2807	—	—	"	12 41 16,0
12	R 99,6	3,027	11,028	74,621	2400	272,45	2324	—	—	"	3 25 15,0
13	L 99,5	2,981	11,003	74,549	2400	275,19	2808	—	—	"	5 0 50,5
14	R 99,6	3,027	11,028	74,817	2400	272,93	2318	—	—	1./IV.	2 19 49,0
15	L 99,6	2,981	11,003	74,916	2400	276,31	2297	—	—	"	3 42 0,0
$\eta_{\text{He}} = 1,063 \cdot \eta_{\text{Luft}}$ bei 93,7°.											
16	R 183,6	3,027	11,028	76,034	3000	242,45	2656	—	—	2./IV.	10 <sup>h</sup> 34 <sup>m</sup> 0,5 <sup>s</sup>
17	L 185,0	2,981	11,003	76,052	3000	242,63	2655	—	—	"	11 54 40,5
18	R 185,1	3,027	11,028	76,110	3000	239,38	2685	—	—	"	4 8 19,5
19	L 184,6	2,981	11,003	76,110	3000	243,33	2651	—	—	"	5 31 27,5
$\eta_{\text{He}} = 1,047 \cdot \eta_{\text{Luft}}$ bei 182,9°.											
	R 184,6	3,004	11,016	76,077	—	—	2662	2699	—		

Die Zusammenstellung der mit Hülfe dieser Werte berechneten  $\eta$  mit den beobachteten ergibt:

$\vartheta$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.
15,3	1969	1987
99,6	2348	2353
184,6	2699	2697

Die Sutherland'sche Formel giebt also sehr gute Uebereinstimmung mit der Beobachtung.

Rayleigh's  $n = 0,681$  stimmt mit den von mir bestimmten nahe überein. Dass es kleiner ist, wäre zu erwarten, weil bei Rayleigh's Anordnung mangelhafte Vorwärmung des Gases in der Capillare zu vermuten ist. Andererseits hatte Rayleigh bei dieser Bestimmung *vollkommen reines Helium* zur Verfügung; ich wage also meinen Wert nicht als zuverlässiger hinzustellen.  $C$  (Sutherland) = 72,2 fällt bei Rayleigh etwas kleiner aus, weil es sich nur auf das Intervall 15–100° bezieht.

#### IV. Eine auffällige Erscheinung bei der Transpiration von Gasgemischen.

Bei den vorliegenden Versuchen mit Helium ist eine starke, oft über 1 Proc. gehende Abweichung der einzelnen beobachteten Reibungscoefficienten voneinander auffällig, die aus einem Fehler im Apparat oder in den Beobachtungen nicht zu erklären ist. Denn einerseits zeigten die Vorversuche mit Luft solche Abweichungen nicht, andererseits blieben diese für He selbst bei sorgfältigster Beobachtung bestehen. Auch hatte der Apparat früher auf  $\frac{1}{3}$  Proc. übereinstimmende Werte gegeben. Der Grund muss also in der Natur des untersuchten Gases liegen. Feuchtigkeit im Apparat war ausgeschlossen.

Ein Vergleich der Resultate aus den einzelnen Versuchen ergibt folgende Gesetzmässigkeit.

Jeder erste, sowie jeder nach mehrstündigem Stehen des Apparates angestellte Versuch zeigt einen grossen Wert des Reibungscoefficienten, während aus den sich zeitlich direct anschliessenden Versuchen<sup>1)</sup> bis über 1 Proc. kleinere Werte resultiren. Diese letzteren sind nahezu untereinander gleich,

1) Das Gas wurde abwechselnd von rechts nach links (R) und von links nach rechts (L) gedrückt.

während in betreff der ersteren eine stetige Abnahme vom ersten Versuch an zu bemerken ist.

Diese Gesetzmässigkeit zeigt sich unzweifelhaft in den Versuchen 1—6 (hier etwas verwischt), 10—15 (hier besonders scharf) und 18 u. 19. Bei den herausfallenden Versuchen 7—9 und 16—17 können 7 und 16 nicht als erste Versuche nach längerem Stehen des Apparates angesehen werden, weil zuvor ein längeres Hinüberdrücken von Gas von links nach rechts nötig war.

In den mitgetheilten Versuchen zeigen nur solche einen hohen Wert, bei denen das Gas von rechts nach links durch den Apparat getrieben wurde. Es erklärt sich daraus, dass zufällig jeder erste Versuch nach längerem Stehen des Apparates in dieser Richtung erfolgte. Versuche, die ich zu einer (allerdings unzureichenden) Erklärung der angegebenen Erscheinung mit einem Gemisch von etwa 92 Proc. Stickstoff und 8 Proc. Wasserstoff anstellte, und bei denen dieselben Abweichungen hervortraten, zeigten die grösseren Werte der ersten Versuche auch bei umgekehrter Strömungsrichtung.

Beobachtungen ähnlicher Art, die zum Vergleich herangezogen werden könnten, scheinen nicht vorzuliegen. Hr. O. E. Meyer, dem ich hier für seine liebenswürdige Auskunft meinen besten Dank aussprechen möchte, theilte mir auf meine Anfrage nach etwaiger einschlägiger Literatur mit, dass ihm bei seinen zusammen mit Hrn. Springmühl angestellten Versuchen mit Luft eine Abnahme des Reibungscoefficienten bei Umkehrung der Strömungsrichtung aufgefallen sei<sup>1)</sup>, jedoch nur bei einer Capillare. Er suchte deshalb auch den Grund für diese Abweichung in der Beschaffenheit der Capillare. Dass die vorliegende Erscheinung darin nicht ihren Grund haben kann, geht schon daraus hervor, dass die Vorversuche mit Luft, sowie frühere Versuche die erwähnten Abweichungen nicht zeigten. Im übrigen weiss sich Hr. Meyer ähnlicher Versuche nicht zu erinnern.

Eine ausreichende Erklärung dieser Erscheinung, die, wie schon erwähnt, in der Natur des Gases, oder vielleicht besser

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 148. p. 20—22. Vers. 1—7 und p. 26—29. Vers. 19—25. 1873.

Gasgemisches, ihren Grund haben muss, ist mir bisher nicht gelungen.

Die Constanthaltung des Druckes an dem zweiten Manometer besorgte in den meisten Fällen der Institutsmechaniker, Hr. Böckel. Im übrigen bin ich in dieser Hinsicht den Herren Dr. Berndt, Dr. Heyse und cand. math. Lindemann zu Dank verpflichtet.

Besonders möchte ich Hrn. Prof. Dorn für die Anregung zu dieser Arbeit meinen besten Dank auch an dieser Stelle aussprechen.

Halle, Physikalisches Institut, 3. Juli 1901.

(Eingegangen 16. Juli 1901.)

---

6. *Ueber die Abhängigkeit der elektrolytischen Ueberführung und der elektromotorischen Kraft reversibler Elemente von physikalischen Einflüssen;*  
 von R. Gans.

I. Theoretischer Teil.

§ 1. Bezeichnungen und Kettenprocesse.

Dass die elektrolytischen Ueberführungszahlen von der Concentration und der Temperatur der Lösungen abhängen, ist bereits durch Versuche von Hittorf<sup>1)</sup>, Bein<sup>2)</sup> u. a. festgestellt worden.

Wir wollen die Abhängigkeit der elektrolytischen Ueberführung von physikalischen Parametern aus der Abhängigkeit elektromotorischer Kräfte von den entsprechenden Parametern zu ermitteln suchen.

Bevor wir daher an unsere eigentliche Arbeit gehen, müssen wir die Kettenvorgänge von Elementen betrachten, welche eine theoretische Behandlung auf thermodynamischem Wege zulassen, um ein für alle Mal die in dieser Arbeit benutzte Terminologie festlegen zu können.

Als *Elemente erster Art* bezeichnen wir die von Helmholtz<sup>3)</sup> zuerst behandelten Concentrationsketten, welche folgendermaassen zusammengesetzt sind: Die Anode und die Kathode bestehen aus demselben Metall, als Flüssigkeiten sind Salzlösungen dieses Metalles verwendet, die sich nur durch ihre Concentrationen unterscheiden, und zwar wird, wie wir sehen werden, die verdünnte Lösung sich an der Anode befinden, während die concentrirtere an der Kathode sein wird.

1) W. Hittorf, Pogg. Ann. 89. p. 177. 1853; 98. p. 1. 1856; 103. p. 1. 1858; 106. p. 337. 1859.

2) W. Bein, Wied. Ann. 46. p. 29. 1892.

3) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. 1. p. 340. 1862 und Wied. Ann. 3. p. 201. 1878.

Nernst<sup>1)</sup> nennt diese Ketten Elemente mit bezüglich des Kations umkehrbaren Elektroden, Ostwald<sup>2)</sup> bezeichnet die Elektroden als Elektroden mit beweglichem Kation.

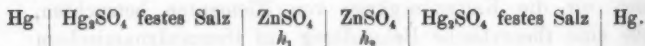
Wählen wir die Concentrationen so wenig verschieden, dass die Ueberführungszahlen des Salzes in der Kathodenflüssigkeit sich für unsere Zwecke nicht wesentlich von denen der Anodenflüssigkeit unterscheiden, so ist der Kettenprocess beim Durchgang der Einheit der Elektrizitätsmenge infolge der eigenen Spannung der, dass ein Aequivalent des Metalles von der Anode zur Kathode überführt ist, während  $1-n$  Aequivalente des Salzes aus der Kathodenflüssigkeit zur Anodenflüssigkeit überführt worden sind, wenn  $n$  die Ueberführungszahl des Kations bezeichnet.

Ein Beispiel der Elemente dieser Art ist



$h$  bedeutet hier wie im Folgenden ein Maass der Concentration.

Als *Elemente zweiter Art* (nach Nernst: Elemente mit bezüglich des Anions umkehrbaren Elektroden, nach Ostwald: Elemente mit Elektroden mit beweglichem Anion) bezeichnen wir die Ketten von folgendem Typus:



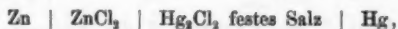
Der Vorgang beim Durchgang der Elektrizitätsmenge 1 in Richtung des Kettenstromes ist folgender: Ein Aequivalent des Anions wird von der Kathode zur Anode transportirt, wo es sich mit dem metallischen Quecksilber zum depolarisirenden Salz vereinigt, während  $n$  Aequivalente Salz von der concentrirteren (Anoden-)Flüssigkeit zur verdünnteren (Kathoden-)Flüssigkeit geschafft werden.

Als *Elemente dritter Art* bezeichnen wir ein System von zwei gegen einander geschalteten Ketten mit Flüssigkeiten verschiedener Concentration nach Art des Helmholtz'schen

1) W. Nernst, Theoretische Chemie, 2. Aufl. p. 648. 1898.

2) W. Ostwald, Lehrb. der allgemeinen Chemie 2. p. 817. 1893.

Zinkchlorid-Calomel-Elementes, welches folgendermaassen zusammengesetzt ist:



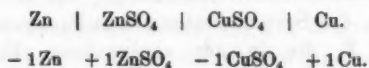
sodass unser System das Schema hat:



Bei dieser Gegeneinanderschaltung ist das Resultat beim Durchgang der Elektrizitätsmenge 1 in Richtung des Kettenstromes dasselbe, als ob ein Aequivalent des Metalles von der Anode des Systems zur Kathode überführt wäre, und als ob ein Aequivalent Salz aus der concentrirteren (Kathoden-)Flüssigkeit zur weniger concentrirten (Anoden-)Flüssigkeit transportirt wäre.

Schliesslich nennen wir *Elemente vierter Art*, die, welche nach dem Typus des Daniell'schen Elementes zusammengesetzt sind. Der Kettenvorgang ist der, dass die Anode ein Aequivalent ihres Metalles verliert, die Kathode ebensoviel vom ihrigen gewinnt, dass ein Aequivalent Salz aus der Kathodenflüssigkeit ausgetrieben wird und ebensoviel zur Anodenflüssigkeit hinzukommt.

Wir deuten den Vorgang an:



Diese Vorgänge sind im Sinne der Thermodynamik reversibel, da sie aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehen. Allerdings müssen wir von der irreversiblen Diffusion absehen, die wir durch geeignete Wahl der Gefässe (Capillarrohre) oder die Diffusion hemmende Einrichtungen (Diaphragmen) beliebig klein machen können. Ferner gehört die Entwicklung Joule'scher Wärme zu den irreversiblen Processen; diese ist aber dem Quadrat der unendlich klein anzunehmenden Stromstärke proportional, während die übrigen Energieleistungen der Stromintensität direct proportional sind, sodass jene gegen diese zu vernachlässigen ist.

§ 2. Ableitung der allgemeinen Formel für die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von irgend einem Zustandsparameter.

Bezeichnet  $U$  die Energie,  $S$  die Entropie des Systems,  $dA$  die vom System geleistete Arbeit, so gilt die Gleichung

$$(1) \quad dA = -dU - TdS,$$

worin  $T$  die absolute Temperatur bedeutet.  $U$  und  $S$  sind nach den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie Functionen der das System bestimmenden Parameter allein.

Wir nehmen  $\delta A$  in der Form an

$$(2) \quad \delta A = \sum_i P_i \delta q_i + E \delta e,$$

wo  $E$  die elektromotorische Kraft des Elementes,  $\delta e$  die in Richtung des Kettenstromes hindurchgegangene unendlich kleine Elektrizitätsmenge,  $\sum_i P_i \delta q_i$  die unendlich kleinen frei verwandelbaren Energieleistungen ausser der elektrischen Energie bedeuten.

Nehmen wir die Ueberführungszahlen als variabel an, so ist der Zustand der Kette nicht mehr definirt durch die in bestimmter, als positiv zu bezeichnender Richtung durch das Element geflossene Elektrizitätsmenge; wir wählen deshalb als unabhängige, das System bestimmende Parameter die absolute Temperatur  $T$ , die in der verdünnteren Flüssigkeit (bez. Anodenflüssigkeit bei Elementen vierter Art) hinzugekommene Salzmenge  $s$  und ausserdem noch eine beliebige, aber endliche Zahl Zustandsparameter  $x_k$ .

Bezeichnen wir alle auf die concentrirteren Lösungen bezüglichen Grössen mit dem Index 1, die auf die verdünnteren bezüglichen mit 2, so gilt die Beziehung

$$(3) \quad \delta s_2 = -\delta s_1 = \delta s,$$

wenn wir die Salzmenge  $s$  in Gramm-Aequivalenten messen.

Wir wollen vom Zustand der Elektroden und den durch ihre Veränderungen verursachten Energieumsätzen absehen.



Dann geht die Gleichung (1) in die Form über

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \sum_i \left[ P_i \left( \frac{\partial q_i}{\partial T} \delta T + \frac{\partial q_i}{\partial s} \delta s + \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \delta x_k \right) \right] \\ & + E \left( \frac{\partial e}{\partial T} \delta T + \frac{\partial e}{\partial s} \delta s + \sum_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \delta x_k \right) \\ & = - \frac{\partial U}{\partial T} \delta T - \frac{\partial U}{\partial s} \delta s - \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \delta x_k \\ & - T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \delta T + \frac{\partial S}{\partial s} \delta s + \sum_k \frac{\partial S}{\partial x_k} \delta x_k \right). \end{aligned} \right.$$

Alle Arbeitsgrößen sind für die Flüssigkeit 1 und für die Flüssigkeit 2 zu bilden und summiert zu denken.

Da die Variationen voneinander unabhängig sind, müssen die Gleichungen zwischen den einzelnen Coefficienten der Variationen bestehen.

Da Elektrizitätsströmung immer gleichzeitig mit Salzüberführung verbunden ist und auch nur durch Salzüberführung veranlasst werden kann, so ist

$$\frac{\partial e}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial x_k} = 0.$$

Ferner setzen wir

$$(5) \quad \frac{\partial e}{\partial s} = k.$$

$k$  bedeutet bei Elementen erster Art  $1/1 - n$ , bei Elementen zweiter Art  $1/n$ , bei Elementen dritter und vierter Art ist  $k = 1$ .

Um die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von einem Zustandsparameter  $x_k$  zu bestimmen, differentiiren wir die erste der beiden folgenden Gleichungen, die sich aus (4) ergeben, nach  $x_k$ , die zweite nach  $s$ :

$$(4a) \quad \sum_i \left| P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right|_1 + k E = - \left| \frac{\partial U}{\partial s} + T \frac{\partial S}{\partial s} \right|_1,$$

$$(4b) \quad \sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} + T \frac{\partial S}{\partial x_k} \right).$$

Hierin bedeutet

$$|A|_1^2 = A_2 - A_1.$$

Die Differentiationen ermöglichen die Elimination von  $U$  und  $S$  und ergeben:

$$(6) \quad \frac{\partial k E}{\partial x_k} = \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right) \right]_1.$$

Bezeichnen wir mit  $E'$  speciell ein Element dritter Art derselben Zusammensetzung, so ist, da hier  $k=1$  ist, während die rechte Seite unverändert bleibt,

$$(7) \quad \frac{\partial k E}{\partial x_k} = \frac{\partial E'}{\partial x_k}.$$

Aus (4a) folgt durch Anwendung auf ein Element erster bez. zweiter Art und das entsprechende Element dritter Art

$$(8) \quad k E = E'.$$

Differentiation von (8) nach  $T$  ergibt

$$(9) \quad \frac{\partial k E}{\partial T} = \frac{\partial E'}{\partial T}.$$

Gleichung (8) hat James Moser<sup>1)</sup> zur Bestimmung von Ueberführungszahlen angewandt durch Messung der elektromotorischen Kraft eines Elementes erster Art und des entsprechenden dritter Art.

Wir können diese Gleichung oder besser Gleichung (7) bez. (9) benutzen, um die Abhängigkeit der Ueberführung von irgend einem Zustandsparameter  $x$  zu bestimmen.

(7) bez. (9) ergibt nämlich

$$k \frac{\partial E}{\partial x} + E \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial E'}{\partial x}$$

oder

$$(10) \quad \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\frac{\partial E'}{\partial x} - k \frac{\partial E}{\partial x}}{E}.$$

Wir haben eine gute Controle für die Richtigkeit der Resultate, wenn wir einmal die Messungen mit einem Element erster und einem dritter Art machen, dann aber auch mit einem zweiter und einem dritter Art; denn so bestimmen wir einmal  $\partial(1-n)/\partial x$ , das andere Mal  $\partial n/\partial x$ , deren Summe Null ergeben muss.

1) James Moser, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) 92. p. 652. 1886.

§ 3. Die Abhängigkeit der Ueberführungszahl und der elektromotorischen Kraft vom Druck.

In vielen Fällen wird die Benutzung von Formel (6) einfacher sein, da man dann nur die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft eines einzigen Elementes von dem betreffenden Parameter zu messen braucht. Es kommt dann nur darauf an, die rechte Seite der Gleichung in jedem speciellen Falle zu bestimmen.

Gleichzeitig wird sich die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft der entsprechenden Elemente dritter und vierter Art von diesem Zustandsparameter ergeben.

Z. B. wollen wir die Abhängigkeit der Ueberführungszahl vom Druck behandeln.

Wir setzen in Gleichung (6)

$$x_k = p.$$

Die unendlich kleine Arbeit  $\sum_i P_i dq_i$  reducirt sich auf das eine Glied  $p dv$ , und so bekommen wir

$$(11) \quad \frac{\partial k E}{\partial p} = \left| \frac{\partial}{\partial s} \left( p \frac{\partial v}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left( p \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right|_1 = - \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_1^2.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich  $\partial k / \partial p$ , wenn  $\partial E / \partial p$  gemessen ist, denn die rechte Seite können wir folgendermaassen ausdrücken:

Es ist

$$v = (w + s) \varphi,$$

wo  $w$  die Masse des Wassers,  $s$  die Masse des Salzes,  $\varphi$  das spezifische Volumen der Lösung ist. Setzen wir ferner als Konzentrationsmaass

$$\frac{s}{w + s} = h,$$

so ist, da  $w$  constant ist,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial h} (1 - h),$$

wo  $\varphi$  natürlich eigentlich das spezifische Volumen der Lösung beim Drucke  $p$  ist; bei der geringen Compressibilität kann

man jedoch, wie auch Gilbaut<sup>1)</sup> es gethan hat, das specifische Volumen als vom Druck unabhängig ansehen, d. h. die Compressibilität vernachlässigen.

Für Elemente dritter und vierter Art ergiebt sich

$$(11a) \quad \frac{\partial E'}{\partial p} = - \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|^2.$$

Die Gleichung (11a) findet sich bereits bei Duhem<sup>2)</sup> und bei Gilbaut<sup>1)</sup> und ist von letzterem ausser an anderen Elementen auch am Daniell'schen Element geprüft worden. Die Theorie stimmte mit der Erfahrung gut überein.

Da die Gleichung (11a) nicht allgemein gilt, sondern nur für Elemente dritter und vierter Art, so gelten die aus derselben von Duhem gezogenen Folgerungen auch nicht für Elemente erster und zweiter Art.

Duhem folgert (l. c.):

1. Wenn bei Stromdurchgang Volumenvergrösserung stattfindet, so nimmt die elektromotorische Kraft mit wachsendem Druck ab.

Wir können in diesem Falle nur schliessen: Die relative Aenderung der elektromotorischen Kraft bei Elementen erster (zweiter) Art durch den Druck ist kleiner als die relative Aenderung der Ueberführungszahl des Anions (Kations) mit dem Druck.

2. Wenn bei Stromdurchgang Volumenverkleinerung stattfindet, so nimmt die elektromotorische Kraft mit wachsendem Druck zu.

Für uns gilt dann nur: Die relative Aenderung der elektromotorischen Kraft ist grösser als die relative Aenderung der Ueberführungszahl.

3. Wenn bei Stromdurchgang keine merkliche Volumenänderung stattfindet, ist die elektromotorische Kraft merklich vom Druck unabhängig.

Für uns bedeutet das: Die relative Aenderung der elektromotorischen Kraft ist merklich gleich der relativen Aenderung der Ueberführungszahl.

Für Elemente dritter und vierter Art sind die Duhem'schen Sätze richtig.

1) H. Gilbaut, *Compt. rend.* **113**. p. 465. 1891.

2) P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique* p. 117. 1886.

Niemöller<sup>1)</sup> hat auch einen Ausdruck für die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft vom Drucke abgeleitet, jedoch begeht er den Fehler, dass er das Volumen  $v_0$ , welches zum Drucke  $p_0$  gehört, also eine Function von  $s$  ist, bei der Differentiation nach  $s$  als Constante betrachtet; dadurch ist das wesentlich in Betracht kommende Glied vernachlässigt.

Braun<sup>2)</sup> hat wohl zuerst die Aenderung der elektromotorischen Kraft einer Concentrationskette bei Druckerhöhung beobachtet und auch durch die Volumenänderung infolge des Kettenprocesses gedeutet. Er weist auch darauf hin, dass eine quantitative Verfolgung dieser Thatsache entscheiden lassen würde, ob und wie die elektrolytische Ueberführung sich mit dem Druck ändert.

Auf analoge Weise, wie oben die Abhängigkeit der Ueberführungszahl vom Druck bestimmt ist, kann man auch die Abhängigkeit von der Concentration ermitteln. Jedoch ist darauf zu achten, dass die beiden Lösungen des Elementes sich in ihren Concentrationen nur so weit unterscheiden, dass in diesem Intervall die Ueberführungszahl merklich denselben Wert hat. Wir wollen jedoch von der Entwicklung der hierauf bezüglichen einfachen Formeln absehen und sofort die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von der Temperatur betrachten.

§ 4. Die Abhängigkeit der Ueberführungszahl und der elektromotorischen Kraft von der Temperatur; die vervollständigte Helmholtz'sche Formel.

Um die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von der Temperatur zu bestimmen, führen wir in (4) die Wärme  $Q$  ein, d. h. wir setzen  $T dS = dQ$ , dann erhalten wir als Coefficienten von  $\delta s$  und  $\delta T$

$$(4a) \quad kE + \sum_i \left| P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right|_1 = - \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|_1 - \left| \frac{\partial Q}{\partial s} \right|_1,$$

$$(4c) \quad \sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} = - \frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\partial Q}{\partial T}.$$

1) Niemöller, Wied. Ann. 18. p. 429. 1883.

2) F. Braun, Zeitschr. f. physikal. Chem. 1. (5) p. 270. Fussnote. 1887.

Differentiiren wir die erste Gleichung nach  $T$ , die zweite nach  $s$ , so erhalten wir durch Elimination von  $U$

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial k E}{\partial T} = - \left| \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial Q}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right) \right|_1^2 \\ - \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} \right) \right]_1^2. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir ausser elektrischer Energie nur Volumenenergie, so wird

$$\sum_i P_i \cdot d q_i = p d v$$

und setzen wir  $p = \text{const.}$ , so ist

$$\sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} \right) \right]_1^2 = 0,$$

und wir erhalten

$$(12a) \quad \frac{\partial k E}{\partial T} = - \left| \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial Q}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right) \right|_1^2.$$

Hierin bedeutet  $|\partial Q / \partial s|_1^2$  die Wärmeentwicklung des Elementes, wenn ein Aequivalent Salz in der verdünnteren Flüssigkeit (bez. Anodenflüssigkeit bei Elementen vierter Art) sich bildet.

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right) = - \frac{\partial}{\partial s} (w + s) c_p = - \left( c_p + (1 - h) \frac{\partial c_p}{\partial h} \right),$$

wo  $c_p$  die spezifische Wärme (bezogen auf 1 Aequivalent) bei constantem Druck bedeutet.

Für Elemente dritter bez. vierter Art ergibt sich:

$$(12b) \quad \frac{\partial E'}{\partial T} = - \left| \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial Q}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right) \right|_1^2.$$

Wir wollen jetzt noch die Helmholtz'sche Formel für den Fall ableiten, dass die Ueberführungszahl Function der Temperatur ist.

Wir gehen wieder von Gleichung (4) aus

$$(4a) \quad k E + \sum_i \left| P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right|_1^2 = - \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|_1^2 - T \left| \frac{\partial S}{\partial s} \right|_1^2,$$

$$(4c) \quad \sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} = - \frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T}.$$

Wir eliminiren  $U$ , indem wir (4a) nach  $T$ , (4b) nach  $s$  differentiiren, und erhalten

$$(13) \quad \frac{\partial k E}{\partial T} = \sum_i \left| \frac{\partial}{\partial s} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} \right) - \frac{\partial}{\partial T} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right) \right|_1^2 - \left| \frac{\partial S}{\partial s} \right|_1^2.$$

Multiplizieren wir (13) mit  $T$  und subtrahiren (13) dann von (4a), so ergibt sich

$$(14) \quad \begin{cases} k E - T \frac{\partial k E}{\partial T} = - \left| \sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} \right|_1^2 \\ - T \sum_i \left| \frac{\partial}{\partial s} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} \right) - \frac{\partial}{\partial T} \left( P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right) \right|_1^2. \end{cases}$$

Der erste Term rechts ist die Wärmetönung, welche sich aus den thermochemischen Daten als Differenz der Bildungswärmen berechnen lässt. Der zweite Term verschwindet, wenn wir nur Volumenenergien berücksichtigen und den Druck constant erhalten.

Nennen wir die Wärmetönung des chemischen Processes, für ein Aequivalent berechnet,  $N$ , so ist

$$(15) \quad E - T \frac{\partial E}{\partial T} - E T \frac{\partial \log k}{\partial T} = N$$

die vervollständigte Helmholtz'sche Formel.

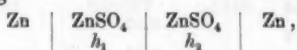
Ebenso bedürfen alle Beziehungen, welche unter der Annahme constanter Ueberführungszahlen abgeleitet sind, bei denen also als eine unabhängige Variable anstatt der in bestimmter als positiv zu rechnender Richtung gewanderten Salzmenge die in dieser Richtung gewanderte Elektrizitätsmenge eingeführt ist, einer Ergänzung.

## II. Experimenteller Teil.

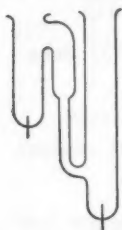
### § 5. Die Abhängigkeit der Ueberführungszahl vom Druck.

Um ein Beispiel zu geben für die Bestimmung der Abhängigkeit der Ueberführung von einem physikalischen Parameter, habe ich den Druckeinfluss auf die Ueberführungszahlen des Zinksulfats untersucht.

Als Element diente mir eine Konzentrationskette von der Zusammensetzung



jedoch ersetzte ich das Zink der Elektroden durch elektrolytisch hergestelltes Zinkamalgame. Als Gefäß für das Element diente mir ein Glasgefäß, wie es in nebenstehender Figur dargestellt ist; dasselbe wurde von Karl Kramer in Freiburg hergestellt.



Das Element wurde in den Druckcylinder einer Cailletet'schen Pumpe von Ducretet in Paris gebracht. Der Leitungsdraht der einen Elektrode war isolirt durch den Rotgussdeckel des Cylinders nach aussen geführt, der Draht der anderen Elektrode war von innen mit dem Deckel selbst verbunden, sodass der Strom an diesem von aussen abgenommen werden konnte. Als Druckflüssigkeit wurde Oel benutzt.

Zur Dichtung der Pumpe trugen die Mechaniker J. und A. Bosch viel bei. Als Dichtungsmaterial erwiesen sich Scheiben aus Zinnlot als sehr brauchbar.

Die Messungen der elektromotorischen Kraft wurden nach der Dubois-Reymond'schen Compensationsmethode vorgenommen, als Nullinstrument diente ein Rubens'sches Galvanometer.

Nach einer Druckveränderung wurde so lange gewartet, bis die elektromotorische Kraft constant wurde, d. h. bis die thermischen Einflüsse infolge der Druckänderung sich ausgeglichen hatten. Erst dann erfolgte die endgültige Ablesung; die Resultate derselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

I	II	III	IV
$p$	$E$	$\Delta E$	$\frac{\Delta E}{\Delta p}$ in $\frac{0,001 \text{ Volt}}{100 \text{ Atm.}}$
in Atm.	in 0,001 Volt	in 0,001 Volt	
0	16,44		
150	16,79	0,35	0,23
300	17,13	0,34	0,23
450	17,46	0,33	0,22
300	17,16	0,30	0,20
150	16,84	0,32	0,21
0	16,51	0,33	0,22



Die Messungen erfolgten bei 18° C. Columne I giebt den Ueberdruck in Atmosphären, Columne II die elektromotorische Kraft in Millivolt, Columne III die Differenzen der Zahlen in Columne II, Columne IV die Aenderung der elektromotorischen Kraft, gemessen in Millivolt, bei einer Druckerhöhung von 100 Atm.

Demnach stellt sich die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft dieses Elementes vom Druck durch die Formel dar:

$$(16) \quad E = 0,01644(1 + 0,000134 p) \text{ Volt,}$$

wo  $p$  die Zahl der Atmosphären Ueberdruck bedeutet.

Wie Formel (11) p. 321 angiebt, brauchen wir noch die Grösse  $|\partial v / \partial s|$ . Nun ist, wie wir auf p. 322 gesehen haben,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \varphi + (1 - h) \frac{\partial \varphi}{\partial h}.$$

Die Werte von  $\varphi$  und  $\partial \varphi / \partial h$  entnehmen wir Messungen von F. Kohlrausch<sup>1)</sup>, welche in folgender Tabelle zusammengestellt sind. Die Concentrationen  $h$  bedeuten die Anzahl Gramm wasserfreien Salzes in 1 g Lösung, die specifischen Gewichte sind bei 18° C. bestimmt, bezogen auf Wasser von 18° C.

$h$	Spec. Gew. $\frac{18^\circ}{18^\circ}$	$\varphi \frac{18^\circ}{18^\circ}$	$\frac{\Delta \varphi}{\Delta h}$
0,00	1,0000	1,0000	—0,968
0,05	1,0509	0,9516	—0,964
0,10	1,1069	0,9034	—0,938
0,15	1,1675	0,8565	

Die specifischen Gewichte der hergestellten Lösungen wurden mit Hülfe der Mohr'schen Senkwaage gemessen und durch Interpolation aus obiger Tabelle die Concentrationen bestimmt. So ergab sich, wenn wir  $s$  jetzt in Gramm messen:

Lösung	Spec. Gew. $\frac{18^\circ}{18^\circ}$	$h$	$\varphi \frac{18^\circ}{18^\circ}$	$\frac{\Delta \varphi}{\Delta h}$	$\frac{\partial v}{\partial s}$
1	1,0600	0,05813	0,9434	—0,964	0,0354
2	1,0060	0,00589	0,9940	—0,968	0,0317

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 40. 1879.

Also ist

$$\left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_1^2 = -0,0037.$$

Ferner ist  $q = (80,39/9654)$  das Aequivalentgewicht des Salzes.

Nach einer Interpolationsformel von Helmholtz<sup>1)</sup> ist, wenn der Index 0 angiebt, dass die betreffende Grösse für Atmosphärendruck gilt,

$$1 - n_0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cdot S^{-\alpha},$$

wo nach unserer Bezeichnungsweise  $S = (1/h) - 1$  ist.

Für Zinksulfat giebt Helmholtz an:

$$\mathfrak{A} = 0,636, \quad \mathfrak{B} = 0,18511, \quad \alpha = 0,28636.$$

Berechnen wir  $1 - n_0$  für beide Concentrationen und nehmen das Mittel, so erhalten wir

$$1 - n_0 = 0,699.$$

Aus Formel (11) p. 321

$$\frac{\partial k E}{\partial p} = -q \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_1^2$$

(Da wir jetzt  $s$  in Gramm messen, müssen wir mit dem Aequivalentgewicht multipliciren) folgt durch Integration, wenn wir die rechte Seite nach dem Vorgehen von Gilbert (vgl. p. 322) als vom Drucke unabhängig betrachten,

$$k E = k_0 E_0 - q \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_1^2 p.$$

Schreiben wir nach p. 327 (16)

$$E = E_0 (1 + \alpha p),$$

so wird

$$1 - n = (1 - n_0) \frac{1 + \alpha p}{1 - \frac{(1 - n_0) q \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_1^2}{E_0} p},$$

und da, wie wir sehen werden, der Coefficient von  $p$  im Nenner sehr klein ist, haben wir genähert

$$1 - n = (1 - n_0) \left[ 1 + \left( \alpha + \frac{(1 - n_0) q \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_1^2}{E_0} \right) p \right].$$

1) H. v. Helmholtz, *Wissensch. Abhandl.* 1. p. 850. 1882. Die Interpolationsformel in der ursprünglichen Abhandlung *Wied. Ann.* 3. p. 213 ist falsch.

Nun ergibt sich

$$\frac{(1 - n_0) q \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_1}{E_0} = 0,0000133,$$

wenn  $p$  in Atmosphären gemessen wird.

So haben wir die Endformel

$$1 - n = 0,699 (1 + 0,00012 p).$$

Als Controle des Resultates hätte sich die entsprechende Messung mit dem Element zweiter Art



ergeben, doch erfolgte hier die Einstellung des Elementes in den Ruhezustand nach stattgefundener Druckänderung so langsam, dass man diese Erscheinung unmöglich durch Temperaturschwankungen erklären konnte. Wahrscheinlich wird die Abhängigkeit der Löslichkeit des Depolarisators  $\text{Hg}_2\text{SO}_4$  vom Druck und von der Concentration des ausserdem noch anwesenden Salzes  $\text{ZnSO}_4$  diese Unregelmässigkeiten hervorgerufen haben.

Piesch<sup>1)</sup> und Fink<sup>2)</sup> haben ausser an anderen Salzen auch am Zinksulfat die Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Druck bestimmt. Vernachlässigen wir die Aenderung des Dissociationsgrades und der Volumenconcentration gegen die Aenderung der Leitfähigkeit, so haben wir, wenn  $\lambda$  die Leitfähigkeit bedeutet,

$$\frac{d \log \lambda}{d p} = \frac{d \log (u + v)}{d p}.$$

Die quantitativen Resultate von Piesch und Fink weichen erheblich voneinander ab, wählen wir die kleinere Zahl von Fink für die Aenderung der Leitfähigkeit, so wird ungefähr

$$\frac{d \log \lambda}{d p} = 0,02,$$

während wir gefunden haben

$$\frac{d \log \frac{v}{u + v}}{d p} = 0,00012,$$

1) B. Piesch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (IIa.) 103. p. 784. 1894.

2) F. Fink, Wied. Ann. 26. p. 481. 1895.

Daraus schliessen wir, dass die relative Aenderung der Ionenbeweglichkeiten  $u$  und  $v$  mit dem Druck in gleichem Sinne und ziemlich gleicher Grösse erfolgt. Uebrigens kann man aus der Aenderung der Leitfähigkeit und der Ueberführungszahl die Aenderung der Ionenbeweglichkeiten berechnen.

Diese Arbeit ist im physikalischen Institut der Universität Strassburg entstanden. Auch an dieser Stelle möchte ich nicht versäumen, meinen hochverehrten Lehrern, Hrn. Prof. Braun und Hrn. Prof. Cantor, für vielfache Anregungen und nützliche Ratschläge meinen besten Dank abzustatten.

Strassburg, Physik. Institut, Mai 1901.

(Eingegangen 18. Juli 1901.)

**7. Zur Interpretation der Maxwell'schen  
Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in  
ruhenden isotropen Medien;  
von J. Sauter.**

Aus den folgenden Betrachtungen soll hervorgehen, dass durch eine geeignete Combination und Modification einzelner bekannter Hypothesen ein relativ sehr einfaches und anschauliches dynamisches System aufgebaut werden kann, dessen leicht ableitbare Bewegungsgleichungen genau die Form der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden, isotropen, heterogenen Halbleitern aufweisen.

1. Im ganzen unendlichen Raum sei eine bewegte, mit Trägheit begabte Substanz continuirlich verbreitet, und diese Substanz befinde sich zeitweise in einem eigentümlichen Zwangszustand.

Es wird also jedes durch eine beliebige geschlossene Fläche  $S$  begrenztes Volumen  $v$  dieser Substanz vom übrigen umgebenden Teil derselben eine Kraftwirkung erleiden: auf jedes Oberflächenelement  $dS$  dieses Volumens wird eine Kraft  $\mathfrak{P} dS$  angreifen. Bezeichnet  $O$  den Ort, an welchem das Element  $dS$  sich befindet, und  $n_a$  die Richtung der äusseren Normale desselben, so lässt sich die Vectorgrösse  $\mathfrak{P}$  als Function von  $O$  und  $n_a$  betrachten. — Das über die ganze Fläche  $S$  genommene Integral  $\int \mathfrak{P} dS$  möge aus Analogie mit der Hydrostatik als „Auftrieb“ bezeichnet werden.

Das Eigentümliche des betreffenden Zwanges bestehe nun darin, dass  $\mathfrak{P}$  durch den Ausdruck  $V \mathfrak{E} \mathfrak{N}_a$  darstellbar sei<sup>1)</sup>, wo  $\mathfrak{N}_a$  ein Vector von Richtung  $n_a$  und von Tensor 1 ist und wo der Vector  $\mathfrak{E}$  mit  $O$  und mit der Zeit variiren mag, nicht aber mit  $n_a$ .  $\mathfrak{P}$  sei daher senkrecht zu  $n_a$  und zu  $\mathfrak{E}$  gerichtet

1) Das Vectorproduct  $V \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$  hat als Tensor  $A_1 A_2 \sin(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ , wo  $A_1$  und  $A_2$  die Tensoren von  $\mathfrak{N}_1$  und  $\mathfrak{N}_2$  sind, und als Richtung diejenige des ausgestreckten linken Armes eines in der Richtung von  $\mathfrak{N}_1$  schwimmenden und in der Richtung von  $\mathfrak{N}_2$  blickenden Beobachters.

und verschwinde für ein zu  $\mathfrak{E}$  senkrechtes Element; man könnte sagen,  $\mathfrak{P}$  sei eine zu  $\mathfrak{E}$  transversale Schubspannung.

Aus dieser Hypothese<sup>1)</sup> ergibt sich für den „Auftrieb“

$$\int V \mathfrak{E} \mathfrak{N}_a \cdot dS = - \int \text{curl } \mathfrak{E} \cdot dv^2)$$

mittels einer bekannten Beziehung zwischen Oberflächen- und Raumintegralen.<sup>3)</sup>

2. Addirt man daher (geometrisch) zur Grösse  $-\text{curl } \mathfrak{E}$ , welche man als „Auftrieb pro Volumeneinheit“ bezeichnen könnte, die (geometrische) Summe  $\sum \mathfrak{F}$  der übrigen am Volumen Eins angreifenden Kräfte, und setzt man das Resultat gleich dem Producte aus Dichte und Beschleunigung am Orte  $O$ , so bekommt man die Hauptbewegungsgleichung der Substanz.

Wir wollen die Dichte mit  $4\pi\mu$  und die Geschwindigkeit mit  $(1/4\pi)\mathfrak{H}$  bezeichnen<sup>4)</sup>, sodass die Bewegungsgrösse pro Volumeneinheit oder, was dasselbe ist, das pro Zeiteinheit und Flächeneinheit durch eine zur Bewegungsrichtung normale Fläche strömende Quantum  $\mathfrak{B}$  der Substanz gleich  $\mu \mathfrak{H}$  zu setzen sein wird, und die Beschleunigung gleich

$$\left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H} \nabla\right) \left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\right).^5)$$

Die betreffende Gleichung wird nun, unter den bis jetzt getroffenen Annahmen,

$$-\text{curl } \mathfrak{E} + \sum \mathfrak{F} = \frac{\mu}{4\pi} (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{H} + \mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt}.$$

1) Vgl. Lord Kelvin, Math. and phys. Papers 3. p. 442. 1890.

2) Eine Definition des Vectors  $\text{curl } \mathfrak{A}$ , den man als „Transversalableitung des Vectors  $\mathfrak{A}$ “ bezeichnen könnte, ist implicite in folgendem Satze enthalten: Das Product  $f' \text{curl } \mathfrak{A}$ , wo  $f'$  den Flächeninhalt der Projection einer unendlich kleinen ebenen geschlossenen Figur auf eine zu  $\text{curl } \mathfrak{A}$  senkrechte Ebene bedeutet, hat als Tensor das Linienintegral  $\int A \cos(\mathfrak{A}, ds) ds$  des Vectors  $\mathfrak{A}$  über den ganzen Umfang der Figur, wenn letztere einem in der Richtung von  $\text{curl } \mathfrak{A}$  blickenden Beobachter im Sinne des Uhrzeigers umkreist erscheint.

3) Vgl. A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität, p. 80. 1894.

4) Vgl. A. Sommerfeld, Wied. Ann. 46. p. 139. 1892.

5) Der Vector  $(\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{H}$  ist gleich  $M$  mal die Ableitung des Vectors  $\mathfrak{H}$  nach der Richtung von  $\mathfrak{H}$ .

Die Bewegung ist „continuirlich“, wenn die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = -4\pi \frac{d\mu}{dt} \quad 1)$$

stattfindet.

3. Betreffend den Bewegungszustand der Substanz sollen nun folgende Annahmen zutreffen:

a) die Dichte an jedem Orte  $O$  sei von der Zeit unabhängig;

b) bei plötzlicher Aufhebung des Zwanges zu irgend einer Zeit dauere die Bewegung ununterbrochen ohne Veränderung der räumlichen Verteilung der Geschwindigkeiten weiter;

c) am Anfange, d. h. zur Zeit  $t = -\infty$ , sei überall  $\mathfrak{S} = 0$  gewesen.

Nach den Annahmen a) und b) wäre also das System ein Cykel mit den Spannungen  $\mathfrak{B}$  als „Kräfte, welche die cyklischen Coordinaten zu vergrössern streben“.<sup>2)</sup>

Annahme b) bedingt, dass für  $\mathfrak{E} = 0$  das Glied  $\mu(d\mathfrak{S}/dt)$  der Hauptgleichung von § 2 bei jedem Wert von  $t$  verschwinde, d. h. dass jederzeit das Glied  $\sum \mathfrak{F}$  gleich dem Gliede  $\mu/4\pi(\mathfrak{S} \nabla) \mathfrak{S}$  sei und infolge dessen auch jederzeit die Beziehung

$$(a) \quad -\operatorname{curl} \mathfrak{E} = \mu \frac{d\mathfrak{S}}{dt}$$

bestehe. Bildet man die *div* der beiden Seiten der Gleichung (a), so bekommt man nach Ersetzung von  $\mu(d\mathfrak{S}/dt)$  durch  $d\mathfrak{B}/dt$  gemäss Annahme a)

$$(b) \quad \operatorname{div} \left( \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right) = 0,$$

1) Eine Definition des Scalaren  $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ , den man als „Longitudinalableitung des Vectors  $\mathfrak{A}$ “ bezeichnen könnte, ist implicite in folgendem Satze enthalten: Das Product  $v \operatorname{div} \mathfrak{A}$ , wo  $v$  den körperlichen Inhalt eines unendlich kleinen Volumens bedeutet, ist gleich dem Flächenintegral  $\int A \cos(\mathfrak{A}, n) df$  des Vectors  $\mathfrak{A}$  über die ganze Oberfläche des Volumens; hierbei ist unter  $n$  die äussere Normale verstanden.

2) Vgl. L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes, I. Teil (1891), dritte Vorlesung; wird bei einem der beschriebenen Beispiele die Einwirkung auf die Kurbel aufgehoben, so bleibt die betreffende Rotation gleichförmig.

da  $\text{div curl}$  identisch verschwindet. Integriert man die Gleichung ( $\beta$ ) nach der Zeit, so ergibt sich  $\text{div } \mathfrak{B} = \text{const.} = (\text{div } \mathfrak{B})_{t=-\infty}$  und unter Berücksichtigung der Annahme c)

$$(\gamma) \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0.$$

Die Gleichungen ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) lassen sich unter Einführung des Vectors

$$\mathfrak{A} = - \int_{-\infty}^t \mathfrak{E} dt$$

auf eine einzige,

$$\text{curl } \mathfrak{A} = \mathfrak{B},$$

reduciren.

Gleichung ( $\gamma$ ) ergibt sich auch, wenn in der Continuitätsbedingung (vgl. § 2)  $d\mu/dt = 0$  gesetzt wird. Diese Bedingung ist daher erfüllt.

4. Der in § 1 definirte specielle Zwangszustand ist aber nur dann möglich, wenn die Kräfte, deren geometrische Summe  $\sum \mathfrak{F}$  in § 2 eingeführt wurde, selbst in kleinen Volumenteilchen derart verteilt sind, dass ihre Zusammensetzung neben der „Resultirenden“  $\sum \mathfrak{F}$  noch ein Kräftepaar liefert vom Momente  $-2\mathfrak{E}$  pro Volumeneinheit<sup>1)</sup>, denn die Zusammensetzung der Kräfte  $\mathfrak{P} dS$  ergibt, abgesehen von dem durch Ungleichförmigkeit in der räumlichen Verteilung von  $\mathfrak{E}$  bedingten „Auftrieb“, selbst bei gleichförmig verteiltem  $\mathfrak{E}$  ein Kräftepaar vom Momente  $+2\mathfrak{E}v$ , welches nun durch ein gleich grosses, aber entgegengesetztes aufgehoben werden muss, damit inneres Gleichgewicht bestehe.

Diese charakteristische Eigenschaft des Zwanges lässt sich am einfachsten einsehen, wenn man das Volumenteilchen als Kreiscylinder mit zu  $\mathfrak{E}$  paralleler Axe und dazu senkrechten Basisflächen annimmt; auf letzteren wird  $\mathfrak{P}$  verschwinden, auf der Mantelfläche dagegen überall gleichen Tensor wie  $\mathfrak{E}$  und die Richtung der Tangente an den Parallelkreis, in dem Sinne der Drehung des Uhrzeigers für einen in der Richtung von  $-\mathfrak{E}$  blickenden Beobachter aufweisen; zwei zur Axe symme-

1) Als Richtung des Momentvectors wird diejenige bezeichnet, in welcher ein Beobachter zu blicken hat, um den Drehsinn des Kräftepaares gleich dem Drehsinn des Uhrzeigers zu finden.



trische Mantelflächenelemente  $dS$  werden ein Kräftepaar vom Momente  $2\rho\mathfrak{E}dS$  liefern, wo  $\rho$  der Halbmesser des Cylinders ist; die Integration wird ergeben

$$2\rho\mathfrak{E} \cdot \frac{2\pi\rho h}{2},$$

wo  $h$  die Höhe desselben ist.

Im folgenden Paragraph sollen nun Hypothesen aufgestellt werden, nach welchen ein Teil des Momentes  $-2\mathfrak{E}$  durch die Bewegung der Substanz verursacht wird, indem der relativen Drehung derselben gegenüber gewissen Partikelchen ein Widerstandsmoment  $2\mathfrak{B}$  pro Volumeneinheit entgegenwirkt. Wir werden deshalb setzen

$$-\mathfrak{E} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{B},$$

wo  $\mathfrak{Q}$  dem übrigen, „motorischen“ Teile entspricht.

5. In allen Regionen des Raumes sei eine Unmenge kleiner Partikelchen verteilt, derart, dass auch in den kleinsten zu betrachtenden Raumteilen eine grosse Anzahl derselben sich befinde; die Dimensionen dieser Partikelchen seien klein im Verhältnis zu den gegenseitigen Abständen derselben. Jedes Partikelchen könne sich um irgend eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe drehen; keines könne aber eine fortschreitende Bewegung ausführen, d. h. die Mittelpunkte seien fest. Sich selbst überlassen würde jedes Partikelchen eine ganz bestimmte Orientation im Raume bez. eine gewisse Ruhelage einnehmen; für irgend eine andere Orientation bez. Lage wirke ein dem Ablenkungswinkel proportionales Kräftepaar entgegen; das Moment des letzteren möge „elastisches Moment“ bezeichnet werden.<sup>1)</sup> Es finde eine Reibungswirkung zwischen der umgebenden erwähnten Substanz und den Partikelchen statt, indem auf dieser wie auf jenen ein der relativen Drehgeschwindigkeit proportionales „Reibungsmoment“ wirke.

Greifen ausser den soeben erwähnten Kräften keine weiteren an einem Partikelchen an, so wird die Ablenkung desselben aus der Ruhelage einem Wirbel in der umgebenden Substanz zuzuschreiben sein; nimmt man nun noch an, dass jedes

1) Diese und die im darauf folgenden Satz ausgedrückten Hypothesen kann man als Modification einer Hypothese von A. Sommerfeld betrachten; vgl. Wied. Ann. 46. p. 140. 1892.

Partikelchen massenlos sei, so müssen jederzeit das darauf wirkende „elastische Moment“ und das auf die umgebende Substanz wirkende „Reibungsmoment“ nach Grösse und Richtung einander gleich sein.

6. Es bezeichne nun  $\frac{1}{2} \mathfrak{D}$  die Ablenkung<sup>1)</sup> eines Partikelchens aus seiner Ruhelage,  $\frac{1}{2} \mathfrak{C}$  die Wirbelgeschwindigkeit der umgebenden Substanz,  $\frac{1}{2} \mathfrak{R}$  die relative Drehgeschwindigkeit der letzteren gegenüber dem Partikelchen, so wird sein

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{R} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt},$$

wobei nach den Gesetzen der Hydrodynamik

$$\text{curl } \mathfrak{S} = 4\pi \mathfrak{C}.$$

Bezeichnet ferner  $N$  die Anzahl Partikelchen pro Volumeneinheit in der betreffenden Region,  $-(8\pi/kN)\mathfrak{D}$  das auf ein Partikelchen angreifende „elastische Moment“ (wo  $k$  ein positiver Factor ist),  $(2/CN)\mathfrak{R}$  das auf dieses Partikelchen angreifende „Reibungsmoment“ (wo  $C$  auch ein positiver Factor ist),  $2\mathfrak{M}/N$  ein anderes auf das Partikelchen angreifendes Moment, so ergibt sich

$$\frac{4\pi}{k} \mathfrak{D} = \mathfrak{M} + \frac{1}{C} \mathfrak{R}$$

und für das Widerstandsmoment  $2\mathfrak{B}$  auf die Volumeneinheit der Substanz

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{C} \mathfrak{R}.$$

Schreibt man  $\mathfrak{C}_1$  anstatt  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}_2$  anstatt  $\mathfrak{C} + \mathfrak{R}$ , so bekommen die Gleichungen des beschriebenen dynamischen Systems dieselbe Form wie die Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien mit einer von Boltzmann benutzten Verallgemeinerung<sup>2)</sup>:

1) Denkt man sich das Partikelchen aus seiner Ruhelage in die momentane Lage durch eine Drehung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe übergeführt, so ergibt sich als Richtung des Vectors  $\mathfrak{D}$  diejenige Richtung der Axe, nach welcher ein Beobachter zu blicken hat, um die Drehung im Sinne der Uhrzeigerdrehung zu finden; der Tensor von  $\mathfrak{D}$  wird der absolute Wert des Drehwinkels sein.

2) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 84.

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathfrak{H} &= \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, & \text{curl } \mathfrak{H} &= 4\pi \mathfrak{C}, \\ \mathfrak{R} &= C(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1), & 4\pi \mathfrak{D} &= k(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_2), \\ \mathfrak{E} &= \mathfrak{R} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}, & \mathfrak{E} &= -\frac{d\mathfrak{M}}{dt};\end{aligned}$$

hierbei bezeichnet  $\mathfrak{M}$  das „elektromagnetische Moment“,  $\mathfrak{B}$  die magnetische Induction,  $\mathfrak{C}$  die totale elektrische Strömung,  $\mathfrak{D}$  die dielektrische Verschiebung,  $\mathfrak{E}$  die innere elektrische Kraft<sup>1)</sup>,  $\mathfrak{E}_1$  die „galvanische“ äussere elektrische Kraft,  $\mathfrak{E}_2$  die „guericische“ äussere elektrische Kraft,  $\mathfrak{H}$  die magnetische Kraft,  $\mathfrak{R}$  die galvanische Strömung,  $C$  die spezifische Leitungsfähigkeit,  $k$  die Dielektricitätsconstante,  $\mu$  die magnetische Permeabilität.

Es mag bemerkt werden, dass in der Elektrostatik die Differenz  $\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1$ , daher also die oben mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnete Grösse eine wesentliche Rolle spielt; die Differentialgleichung der Dichte  $\varepsilon = \text{div } \mathfrak{D}$  der „wahren Elektrizität“ lautet z. B.

$$k \frac{d\varepsilon}{dt} + 4\pi C\varepsilon = kC \text{div } \mathfrak{M}$$

im homogenen Felde.<sup>2)</sup>

Interessant mag noch die Bemerkung sein, dass die Bedingung  $\mathfrak{E}_2 = 0$ , welche zu der von Hertz benutzten Form<sup>3)</sup> der Maxwell'schen Gleichungen führt, der Annahme entspricht, die Drehkräfte  $2\mathfrak{B}$  und  $2\mathfrak{M}$  seien als Action und Reaction

1) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 110.

2) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 104.

3) Die sechs Hertz'schen Gleichungen lauten (vgl. Wied. Ann. 40. p. 577. 1890):

$$\begin{aligned}A\bar{\mu} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, & A\bar{s} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A\lambda(X - X'), \\ A\bar{\mu} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, & A\bar{s} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A\lambda(Y - Y'), \\ A\bar{\mu} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, & A\bar{s} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A\lambda(Z - Z');\end{aligned}$$

$X, Y, Z$  sind die Componenten von  $\mathfrak{E}$ ;  $L, M, N$  diejenigen von  $\mathfrak{H}$ ;  $X', Y', Z'$  diejenigen von  $\mathfrak{M}$ ; ferner ist  $A\bar{\mu} = \mu$ ,  $A\bar{s} = k$ ,  $A\lambda = C$ ; das Coordinatensystem wäre ein „Hopfencoordinatensystem“, d. h. einem in der Richtung der  $y$ -Axe schwimmenden und nach der Richtung der  $x$ -Axe blickenden Beobachter erscheine die  $z$ -Axe nach links gerichtet;  $A$  ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether.

zwischen den Partikelchen und der umgebenden Substanz auffassbar; es wäre dann  $\mathfrak{L} = -\mathfrak{M}$ .

Eine andere Vereinfachung ergibt die Annahme  $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$  bez.  $\mathfrak{M} = 0$ , nach welcher die Grössen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{D}$  proportional variiren.<sup>1)</sup>

Wollte man das beschriebene dynamische System so compliciren, dass es auch die Farbenzerstreuung in Licht nicht absorbirender Medien wenigstens qualitativ wiedergebe, so wäre die Einführung von Trägheit für die Partikelchen angezeigt.

Bern, Juni 1901.

1) Diese Vereinfachung ist in dem citirten Werk von Föppl durchgeführt.

(Eingegangen 23. Juni 1901.)

### 8. Einfluss von Diaphragmen auf elektrische Dauerentladung durch Luft von Atmosphärendruck; von M. Toepler.

In den Stromkreis einer vielplattigen 'Toepler'schen Influenzmaschine sei ein Schlagraum eingeschaltet, dessen Elektroden von einer Metallspitze und einer Halbleiterplatte (Schiefer, Basalt etc.) gebildet werden.<sup>1)</sup> *Das Fließen der Elektrizität durch den Schlagraum findet dann ununterbrochen nahezu continuirlich statt*, und zwar beobachtet man, wie früher nachgewiesen, für wachsende Stromstärke nacheinander das Auftreten von Glimmen, dann Büschel und Büschellichtbogen<sup>2)</sup>; nur beim Uebergange einer Entladungsform in die nächstfolgende tritt eine zeitlich discontinuirliche Entladung, wie z. B. eine Reihe von Stossbüscheln oder Funken auf. Die Strömung findet bei Glimm- und negativer Büschelentladung auf breiter Bahn statt; ebenso in der Krone des positiven Büschels; im Stiele des letzteren und bei positivem oder negativem Büschellichtbogen erscheinen alle Stromfäden eng zusammengedrängt.

In Folgendem sei kurz der Einfluss, welchen Metallstücke oder Diaphragmen in den Schlagraum gebracht auf nahe continuirliche Entladung ausüben, geschildert. Speciell das Verhalten des Büschellichtbogens ist hierbei in mancher Hinsicht interessant; es wird daher vorwiegende Berücksichtigung finden.

I. Hält man während des nahe continuirlichen Elektricitätsströmens durch den Schlagraum ein isolirtes oder auch mit der Erde verbundenes Metallstück in die Strömungsbahn, so kann der Strom je nach der Stellung und Grösse des Metallkörpers ganz oder teilweise durch diesen hindurchgehen. Hierbei bleiben die beim Leiter vorbeiführenden Stromfäden

1) An Stelle einer vielplattigen Influenzmaschine könnte natürlich auch eine Accumulatorenatterie oder Gleichstrommaschine von hinreichender Spannung als Stromquelle dienen.

2) Um schliesslich einen Flammenbogen zu erhalten, genügt der Strom einer 60plattigen Influenzmaschine noch nicht.

nach wie vor dem Auge sichtbar, was besonders leicht bei der Krone des positiven Dauerbüschels wahrzunehmen ist.

Für die durchgehenden Stromfäden wird das Metallstück zur Zwischenelektrode; für sie zerfällt der Schlagraum in zwei Hälften, welche dann bezüglich der in ihnen zur Ausbildung gelangenden Lichterscheinungen fast unabhängig voneinander sind. Besonders leicht zu beobachten und interessant ist dies in dem speciellen Falle, dass ein negativer Büschellichtbogen durch ein Metallstück in zweie geteilt ist.

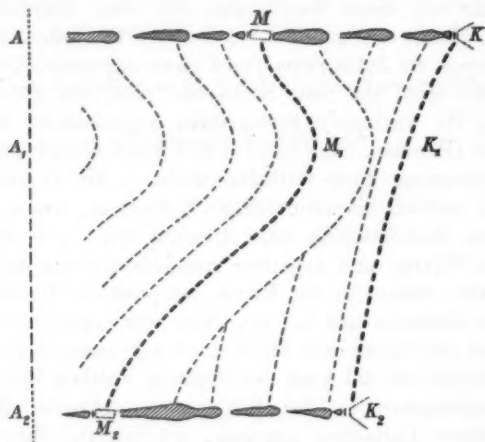


Fig. 1.

In Fig. 1 ist bei  $AMK$  die Lichterscheinung angedeutet, wie man sie zwischen Anode  $A$ , Metallstück  $M$  und Kathode  $K$  bei einem Elektrodenabstände  $AK$  von etwa 7 cm und etwa 2 Milliamp. beobachten kann. Beide Schlagraumhälften zeigen negative Büschellichtbogen; in  $AM$  ist der positive Anteil fast völlig unterdrückt (Kennzeichen grosser Anodendunkelraum), in  $MK$  gehört die eine Lichtschicht dem hier nicht gänzlich unterdrückten positiven Anteile zu.<sup>1)</sup> Bei Bewegung von  $M$

1) Die Darstellung der Leuchtmassen und übrigen Lichter ist in den Figuren der vorliegenden Arbeit etwas schematisch gehalten; Photographie von Büschellichtbogen finden sich in den *Abh. d. naturw. Ges. Isis* Dresden 1898 u. in *Wied. Ann.* **63**, p. 109. 1897 sowie **69**, p. 680. 1899.

haften die Schichten des negativen Anteiles vom Schlagraume  $AM$  an  $M$ , ebenso die Schicht des positiven Anteiles in  $MK$ . Durch die gestrichelten Linien ist angedeutet, welche Stellung die einzelnen Lichtschichten einnehmen, wenn z. B. die Kathode  $K$  von  $K$  über  $K_1$  nach  $K_2$  und gleichzeitig das Metallstück  $M$  von  $M$  über  $M_1$  nach  $M_2$  verschoben wird.

Besonders bemerkenswert ist die Thatsache, dass die Entladungsform in beiden Schlagraumteilen eine *verschiedene* sein kann (vgl. weiter unten Abschnitt VI).

II. Ein ähnliches Verhalten beobachtet man, wenn an Stelle des Metallzwischenstückes eine mit einer kleinen Oeffnung versehene Platte von Glimmer, Glas oder einem anderen Isolator in den Schlagraum parallel zur Halbleiterplatte einge-

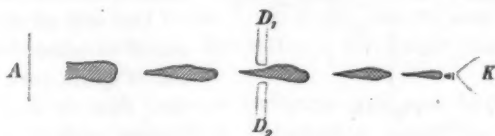


Fig. 2.

schoben wird. Die enge Oeffnung (ca. 2 mm Durchmesser) wirkt ganz analog wie das Metallstück, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier *alle* Stromfäden gezwungen sind, die Oeffnung zu durchsetzen; die Oeffnung wird zur *Zwischenelektrode*. Insbesondere beobachtet man auch hier, dass die Entladungsform beiderseits der Platte mit Oeffnung eine *verschiedene* sein kann; so kann z. B. positiver Büschellichtbogen einerseits, positiver Büschel andererseits und ebenso bei Stromumkehr diesseits negativer Büschellichtbogen, jenseits der Oeffnung negative Büschelentladung (vgl. Abschnitt VI) auftreten.

III. Ganz besonders interessant sind die Erscheinungen für den Fall, dass *beiderseits der Oeffnung Büschellichtbogen* zur Ausbildung kommen. In Fig. 2 ist der zu Fig. 1 analoge Fall dargestellt;  $D_1 D_2$  bedeutet z. B. eine durchlochte Glimmerplatte. In der Oeffnung bildet sich *stets eine Leuchtmasse*; ihr spitzes Ende ist in allen Fällen der Anode zugekehrt. Bewegt man die Glimmerplatte, so haften, ganz wie bei Fig. 1 am

Metallstücke, so hier an der Oeffnung die Schichten des negativen Anteiles links und des positiven Anteiles rechts.

In Fig. 3a ist die Anordnung der Lichtteile in der Nähe eines Metallzwischenstückes, in Fig. 3b in der einer Oeffnung



Fig. 3a.

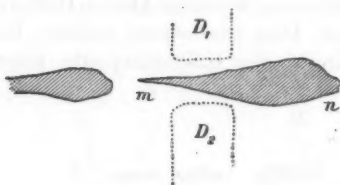


Fig. 3b.

vergrößert abgebildet und zwar ist angenommen, dass beiderseits Büschellichtbogen zur Ausbildung gekommen ist. In Fig. 3a bedeutet *a* das sogenannte blaue Kathodenlicht, *b* das Anodenglimmlicht, *c* das ziegelrote Licht, *d*<sub>1</sub> *d*<sub>2</sub> carminrote Leuchtmassen.<sup>1)</sup>

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Falle von Fig. 3a und 3b ist der, dass in Fig. 3b die Lichter *a* und *b* fehlen;

*c* und *d*<sub>1</sub> erscheinen zu einer einzigen Leuchtmasse *mn* verschmolzen.

1) Die angegebene Färbung gilt für Stromstärken bis etwa 3 Milliamp. Eine Verringerung des Luftdruckes bis auf 10 mm Hg und weniger ändert die Färbung nicht wesentlich (vgl. Abh. Isis I. c.). In anderen Gasen als Luft (z. B. in CO<sub>2</sub>) ist dagegen die Färbung der einzelnen Lichtteile eine andere.

Es sei ferner zur Orientirung darauf hingewiesen, dass nach früheren Untersuchungen (vgl. wieder Abh. Isis, I. c.) zwischen den Lichtern des Büschellichtbogens in freier Luft und den bekannten Lichterscheinungen in Geissleröhren folgender Zusammenhang besteht. Das Licht *a* entspricht dem sogenannten blauen Kathodenlichte, das Licht *b* dem Anodenglimmlichte, das ziegelrote Licht *c* fehlt meist in Geissleröhren (oft dürfte es in der ersten Schicht der sogenannten Anodenlichtsäule wiederzufinden sein, welche bekanntlich vielfach ein von dem der übrigen verschiedenes Verhalten zeigt). Die Leuchtmassen *d*<sub>1</sub> und *d*<sub>2</sub> sind nicht etwa identisch mit den bekannten sogenannten Anodenlichtschichten; vielmehr ist die gesamte Anodenlichtsäule aufzufassen als eine *einzige* sekundär wieder in kurze Schichten zerfallene Leuchtmasse. Es ist nicht uninteressant, dass sich die Leuchtmassen *d*<sub>1</sub> *d*<sub>2</sub> . . . , wie vorliegende Mittheilung zeigt, hinsichtlich des Einflusses von Bahnverengerungen ganz ähnlich verhalten, wie es von den Anodenlichtschichten bekannt ist.



Es scheint also, dass die Bildung der Lichter  $a$  und  $b$  und der zugehörigen Dunkelräume das Vorhandensein einer Metallelektrode voraussetzen. Ihr Auftreten ist daher wohl veranlasst durch die materielle Discontinuität beim Uebertritte der Elektrizität von Luft in Metall einerseits, von Metall in Luft andererseits. Dagegen sind die Lichter  $c$  und  $d_2$  schon dem normalen Fliessen der Elektrizität durch einen Luftraum eigentümlich; sie stellen jedes gewissermaassen eine halbe Leuchtmasse dar.

Auch die Färbung der Lichtteile spricht für die Richtigkeit der ausgesprochenen Auffassung. Das Ende  $m$  der Leuchtmasse in der Oeffnung ist ziegelrot wie  $c$ , das Ende  $n$  dagegen carminrot wie  $d_2$  gefärbt (bei Entladung durch gewöhnliche Luft). Ueberhaupt zeigt auch *jede* andere Leuchtmasse, z. B.  $d_1$ , in gleicher Weise in Richtung des Stromes carminrote Färbung, während ihr spitzes, der Anode zugekehrtes Ende ziegelrot erscheint.

IV. Dass sich in einer Oeffnung stets eine Leuchtmasse und zwar ohne wesentliche Deformation derselben (im Ver- gleiche zu ihrer Form in freier Luft) bildet, muss in der Natur des Strömungsprocesses in der Leuchtmasse und in ihrer Umgebung begründet sein. Die Stellung der Leuchtmasse in der Oeffnung wird derartig sein, dass die natürliche Entwicklung des Strömungsprocesses, wie er bei einer *freien* Leuchtmasse von selbst zur Ausbildung kommt, auch bei der Leuchtmasse in der Oeffnung möglichst erhalten bleibt. Die Annahme liegt also sehr nahe, dass bei jeder Leuchtmasse die Elektrizitätsströmung in der Weise erfolgt, wie es die Pfeile in Fig. 4 andeuten.

Beim Büschellichtbogen wechseln hiernach wahrscheinlich Strecken breiterer Strömungsbahn mit Bahnverengerungen periodisch ab; letztere liegen je in der Nähe des spitzen, der Anode zugekehrten Endes jeder Leuchtmasse.

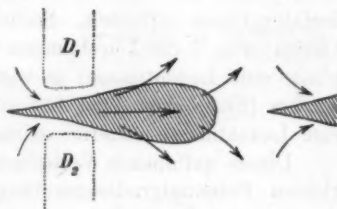


Fig. 4.

V. Der Satz, dass eine Oeffnung in einer Isolatorplatte wie eine Zwischenelektrode wirkt, und dass sich in ihr stets eine Leuchtmasse bildet, gilt auch noch für recht *weite* Oeffnungen (von 1 cm Durchmesser und auch noch etwas mehr). In weiten Diaphragmenöffnungen kommt jedoch manchmal an Stelle einer einzigen Leuchtmasse ein Bündel von mehreren fadenförmigen Leuchtmassen zur Ausbildung.

Bemerkenswert war hierbei, dass eine *ruhige* stabile Schichtbildung meist nur dann eintrat, wenn auch schon ohne Diaphragma an dem Orte, wo die Oeffnung des Diaphragmas sich befand, eine Schicht zur Ausbildung gekommen wäre; andernfalls war die Schichtenbildung in der Regel höchst unstät. Während also enge Oeffnungen stets die Stellung einer Leuchtmasse in ihnen erzwingen, nimmt dieser Zwang bei immer weiteren Oeffnungen mehr und mehr ab, sodass die von der spitzen Elektrode ausgehende Ordnung der Lichtteile bis in die Oeffnung und schliesslich bei ganz weiten Oeffnungen durch sie hindurch zur Geltung kommt.

Ganz besonders auffallend ist die Thatsache, dass sich *Metallplatten* mit nicht zu kleiner Oeffnung ganz ähnlich wie Isolatorplatten verhalten. So bildete sich z. B. in der Kreisöffnung von 1 cm Durchmesser einer 0,5 cm dicken Kupferplatte eine Leuchtmasse; ja sogar in der Axe eines Gasrohrstückes (Eisen) von 1 cm Länge und 1 cm lichter Weite war eine Leuchtmasse dauernd existenzfähig!

Dieses auffallende Verhalten erklärt sich aus dem relativ kleinen Potentialgradienten längs eines Büschellichtbogens<sup>1)</sup>; so wird es z. B. möglich sein, durch das Rohr *abcd* in Fig. 5 einen ursprünglich zwischen *A* und *B* bestehenden Büschellichtbogen von *B* und *C* nach *K* hindurchzuziehen, wenn nur die Spannungsdifferenz zwischen *B* und *C* kleiner bleibt, als zur Neubildung eines Entladungsweges von *B* über *a* und *b* nach *C* nötig wäre.<sup>2)</sup>

Bei Anwendung von *Glasrohren von mehreren Centimetern Länge* zeigt sich, dass immer in dem der *Anode* zugekehrten

1) M. Toepler, Wied. Ann. 66. p. 672. 1898.

2) Es sei darauf hingewiesen, dass durch die angegebenen Thatsachen auch manche Beobachtungen an Kugelblitzen unserem Verständnisse näher gebracht werden.

Ende eine Schicht sich bildet und daselbst bei Rohr- oder Elektrodenverschiebung festgehalten wird.

Aehnlichen Einfluss wie die Oeffnung in einer Platte übt auch schon das Annähern eines Körpers, z. B. der Kante

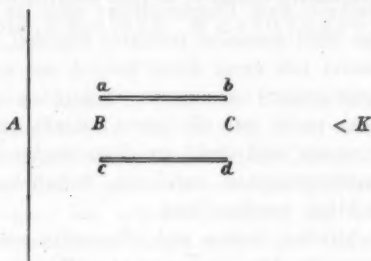


Fig. 5.

eines Isolators, des Endes eines Metalldrahtes etc. Speziell beim Büschellichtbogen veranlasst jeder hinreichend genäherte Körper auch in denjenigen Stromfäden, für welche er nicht zur Zwischenelektrode wird, das Auftreten einer etwas stromauf gelegenen am Körper haftenden Dunkelstelle.

VI. Bildet sich in einem der beiden Schlagräume, z. B. links vom Diaphragma, kein Büschellichtbogen, sondern ein *negativer Büschel*, so beobachtet man die in Figg. 6a und 6b vergrößert angegebene Entwicklung der Lichter. Die bei einem voll entwickelten negativen Büschel in der Büschelaxe erscheinende ziegelrote Lichtspitze ist nichts anderes als das Licht *c* in Fig. 3, d. h. sie ist wie dieses als halbe Leuchtmasse aufzufassen.

Das bläuliche sie umgebende Büschellicht rührt von den im übrigen meist nicht sichtbaren stark nach der Kathode bez. der Oeffnung convergenten Stromfäden her (vgl. die Pfeile in Fig. 4). Bei sehr intensiven negativen Büscheln verschwinden sie schliesslich neben der immer intensiver werdenden centralen Lichtspitze, bei schwachen Büscheln ist andererseits



Fig. 6a.

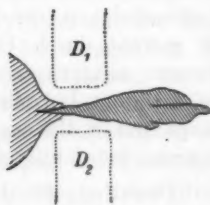


Fig. 6b.

die Strömungsdichte selbst im centralen Teile nicht gross genug zur Ausbildung der ziegelroten Lichtspitze.

Analog wie der blaue Lichtkegel des negativen Büschels zum ziegelroten centralen Lichte verhält sich die Krone des positiven Büschels zum Büschelstiele; nur ist zu bemerken, dass der lange Stiel *intensiver* positiver Büschel, wie man leicht beobachtet, meist von einer *Reihe* freilich nur unscharf gegeneinander abgegrenzter carminroter Schichten gebildet wird, von denen dann meist nur die letzte Schicht die von ihr endgültig divergirenden und nicht zu einer weiteren Leuchtmasse erneut zusammengefassten zahllosen bläulichen Stromfäden dem Auge sichtbar werden lässt.

Die Leuchtfäden lassen sich ihrerseits auch wieder auffassen als langgestreckte, aber nur unvollkommen ausgebildete Leuchtmassen.

*Alle Entladungsformen, in welche bei Stromverstärkung die positive oder negative Glimmentladung successive übergeht, erscheinen hiernach als zusammengesetzt aus einer mit zunehmender Stromstärke an Zahl wachsenden Reihe von mehr oder minder vollkommen ausgebildeten Leuchtmassen.*

Die in vorliegender Arbeit mitgeteilten Beobachtungen gelten, wie schliesslich nochmals hervorgehoben sei, für ein möglichst stationäres Elektrizitätsfliessen durch den Schlagraum, d. h. für constante Stromzufuhr zu den Elektroden und kleine Elektrodencapacität; selbst in diesem Falle wird die Regelmässigkeit der Ausbildung der Lichterscheinungen sehr oft getrübt durch Unregelmässigkeiten in der Bildung des Stromes mitgerissener Luft. Bei stossweiser Entladung, wie sie z. B. mit Inductionsapparaten erhalten wird, treten überhaupt nur Entladungsformen auf, welche als höchst unvollkommen entwickelt zu bezeichnen sind.

Dresden, 30. Juli 1901.

(Eingegangen 31. Juli 1901.)

9. *Das astigmatische Bild des horizontalen, ebenen  
Grundes eines Wasserbassins;  
von Ludwig Matthiessen.*

Es ist eine ziemlich bekannte Erscheinung und in verschiedenen Handbüchern der Physik wird man darüber belehrt, dass leuchtende oder beleuchtete Objecte, welche unter der Oberfläche des Wassers oder einer anderen brechenden Flüssigkeit liegen, bei schiefer Incidenz der Lichtstrahlen in die oberste Niveaufläche dieser selbst und zugleich dem Auge des Beobachters genähert erscheinen. Zur theoretischen Beweisführung wurden auch Formeln abgeleitet, geometrische Constructionen gegeben oder die Gleichung der diakaustischen Curve hergeleitet, um die Function der Coordinatenverschiebung der Bildpunkte gegen die Objectpunkte zu bestimmen. Schellbach hat das Verdienst für ein bestimmtes Brechungsvermögen der Flüssigkeit und für verschiedene Neigungen der Blicklinie des Auges gegen die Oberfläche der Flüssigkeit, die Diakaustik und die scheinbare Verzerrung der Objecte auf dem Grunde mittels genauer rechnerischer Verhältnisse bildlich veranschaulicht zu haben. Dessen ungeachtet leiden alle diese mathematischen und geometrischen Darstellungen an dem Mangel, dass sie das vorgelegte Problem nur zur Hälfte lösen und damit einen wichtigen Teil der dioptrischen Vorgänge im Unklaren lassen. Es ist nicht unbekannt, dass bei jeder Incidenz von dünnen Strahlenbüscheln, sei es an spiegelnden oder brechenden Flächen immer *zwei* Katakaustiken oder Diakaustiken, also stets *zwei* Abbildungen von Punktreihen giebt, indem die Strahlenkegel die sogenannte tetraëdrische Modification erleiden (Reusch, Kummer), also nicht gespiegelte bez. gebrochene Bündel mit *einem* Bildpunkt (homocentrische Kegel), sondern mit *zwei* getrennten, sich senkrecht kreuzenden Brennlinien und einer dazwischen liegenden Brennstrecke bilden. Auch Schellbach hat diesen Umstand unbeachtet gelassen, indem er den primären Strahlenkegel in lauter Strahlenfächer zerlegt, welche in der Einfallsebene, dem

sogenannten Hauptnormalschnitt des brechenden elliptischen Flächenelementes liegen. Zerlegt man aber dies elliptische brechende Flächenelement in lauter zum Nebennormalschnitte parallele Streifen, und betrachtet die dioptrische Wirkung aller zu diesen Streifen gehörigen Strahlenfächer, so erhält man ein zweites ebenso helles und scharfes Bild, welches ebenfalls in der Blicklinie des Auges liegt und durch das andere völlig verdeckt wird.

Die analytische Bestimmung des Ortes des Bildpunktes für den Hauptnormalschnitt, also eine durch das Auge des Beobachters und das Einfallslot gelegte Ebene, wird abgehandelt bei Wüllner<sup>1)</sup> auf Grund einer Abhandlung von K. L. Bauer<sup>2)</sup>, mit welcher gleichzeitig eine andere vom Verfasser<sup>3)</sup> erschien.

Während nun Engel und Schellbach in der ersten Tafel ihrer darstellenden Optik die scheinbaren Oerter und Deformationen der Bilder eines bestimmten Objectes für verschiedene Oerter des beobachtenden Auges und verschiedene Blicklinien zeichnen, wollen wir umgekehrt für ein festes Auge und variirende Blickrichtungen die Bildfläche, also die Bilder sämtlicher Elemente der Bodenfläche zu bestimmen suchen. Wir bestimmen für unseren Fall die Gleichungen der beiden astigmatischen Bildflächen, indem wir von den Reusch'schen Abscissengleichungen<sup>4)</sup> für Object- und Bildpunkte für die schiefe Incidenz in eine sphärische Fläche ausgehen. Dieselben lauten für den Nebennormalschnitt

$$(I) \quad \frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{n r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1,$$

für den Hauptnormalschnitt

$$(II) \quad \frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{n r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_1^2}{x_1} = 1,$$

worin  $r$  den Krümmungsradius der brechenden Fläche,  $e_1$  und  $e_2$  Einfall- und Brechungswinkel,  $n$  ( $< 1$ ) den Index,  $x_0$  den Abstand des Objectpunktes auf dem Strahle,  $x_2$  und  $x_1$  die beiden

1) Wüllner, Lehrb. d. Exp.-Phys. 4. p. 93. 1899.

2) K. L. Bauer, Pogg. Ann. 153. 1874; 154. 1875.

3) L. Matthiessen, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. p. 178. 1874.

4) Reusch, Pogg. Ann. 130. 1867.

Abstände der beiden Brennlinien auf dem Strahle bedeuten. Dabei liegt der Bildpunkt  $B_2$ , welcher zu  $x_2$  gehört, stets auf der optischen Centrale des Objectpunktes  $P_0$ , welcher zu  $x_0$  gehört.

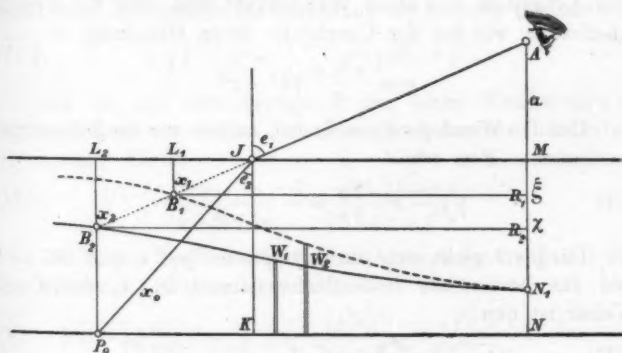
Hat man zwei ebene Parallelfächen vor sich, also die brechende oberste Niveaufäche und die dazu parallele Grundfläche des Wasserbassins, so wird man diese beiden Flächen als zwei concentrische Kugelfächen von unendlich grossem Radius betrachten, also  $r = \infty$  setzen dürfen. Dadurch wird für die Brennlinie  $B_2$ :

$$(III) \quad \frac{1}{x_0} - \frac{n}{x_2} = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = n x_0;$$

für die Brennlinie  $B_1$ :

$$(IV) \quad \frac{\cos e_2^2}{x_0} - \frac{n \cos e_1^2}{x_1} = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = n x_0 \frac{\cos e_1^2}{\cos e_2^2} = x_2 \frac{\cos e_1^2}{\cos e_2^2}.$$

Kennt man also die Objectdistanz  $x_0$ , so findet man die Bilddistanz  $x_2$  aus Gleichung (III), die Bilddistanz  $x_1$  aus Gleichung (IV) durch viermalige Projection zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel.





Es sei  $MR_2 = x$  die Abscisse,  $R_2 B_2 = y$  die Ordinate des II. Bildpunktes oder der II. Brennpunktlinie,  $P_0$  der Objectpunkt auf dem Grunde  $NK$ ,  $JP_0 = x_0$  die Abscisse auf dem Strahle und  $JB_2 = x_2$  die Abscisse des Bildpunktes auf dem Strahle. Ferner sei  $JL_2 = u_2$ ,  $a$  der Abstand des Auges  $A$  von der Niveaufläche  $JM$ ,  $MN = d$  die wirkliche Tiefe des Bassins,  $MN_1 = nd = b$  die scheinbare Tiefe, dann ist

$$\begin{aligned} x_2^2 &= u_2^2 + x^2, & n^2 &= \frac{u_2^2 + x^2}{u_2^2 + d^2}, & \frac{u_2}{y} &= \frac{x}{x+a}. \\ x_0^2 &= u_2^2 + d^2, \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$u_2^2 = y^2 \frac{x^2}{(x+a)^2} = \frac{n^2 d^2 - x^2}{1 - n^2} = \frac{b^2 - x^2}{1 - n^2};$$

und die gesuchte Gleichung der Bildcurve

$$(V) \quad y \sqrt{1 - n^2} = \frac{x+a}{x} \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Es ist demnach der Normalschnitt der II. Bildfläche des Untergrundes eine gestreckte Conchoide. Die Bildcurve hat eine Asymptote und einen Wendepunkt und zwar für dieselbe Abscisse  $x$ , wie bei der Conchoide, deren Gleichung ist

$$y = \frac{x+a}{x} \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Um den Wendepunkt zu finden, suchen wir die Differentialquotienten. Man erhält

$$(VI) \quad \sqrt{1 - n^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{x^2 + a b^2}{x^2 \sqrt{b^2 - x^2}}.$$

Daraus ergibt sich die Asymptote  $\partial y / \partial x = \infty$  für  $x=0$  und das horizontale Bodenflächenelement in  $N_1$  für  $x=b$ . Weiter ist nun

$$(VII) \quad \sqrt{1 - n^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-(x^2 + 3 a x^2 - 2 a b^2)}{x^3 (b^2 - x^2)}.$$

Der Wendepunkt  $W$ , vor welchem die Grundfläche concav, und hinter welchem sie weiter seitwärts convex erscheint, ist also bei

$$x^3 + 3 a x^2 - 2 a b^2 = 0.$$

Um die Ideen zu fixiren, nehmen wir an, es sei  $n = \frac{3}{4}$  (Wasser),  $a = 8$  cm,  $d = 6,47$  cm, also  $b = nd = 4,85$  cm, so



hat die Gleichung die einzige reelle Wurzel 3,687 cm, woraus sich  $y = 15,1$  cm ergibt.

Wir wollen noch die I. Bildfläche  $B_1$  bestimmen. Es sei  $MR_1 = \xi$  die Abscisse,  $R_1 B_1 = \eta$  die Ordinate der ersten Brennpunktlinie  $B_1$ ;  $JB_1 = x_1$  die Abscisse derselben auf dem Strahle. Ferner sei  $JL = u_1$ ; alsdann ist

$$u_1 : \eta = \xi : (\xi + a),$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\cos e_1^2}{\cos e_2^2} = \frac{1 + \tan e_1^2}{1 + \tan e_2^2} = \frac{1 + (u_1 : d)^2}{1 + (u_1 : x)^2} = \frac{x^2}{b^2};$$

folglich wird

$$\eta \frac{\xi}{\xi + a} = u_1 = u_2 \frac{x^2}{b^2}.$$

Weiter ist

$$x : \xi = u_2 : u_1 = b^2 : x^2,$$

oder

$$x = (b^2 \xi)^{1/3}.$$

In Berücksichtigung der früheren gefundenen Relation

$$u_2 = \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{1 - n^2}}$$

findet man schliesslich die Gleichung der anderen Bildcurve  $B_1$

$$(VIII) \quad \eta \sqrt{1 - n^2} = \frac{\xi + a}{\xi} \xi^{2/3} \sqrt{b^{2/3} - \xi^{2/3}}.$$

Um sie auf eine Asymptote und einen Wendepunkt zu prüfen, bilden wir wieder den ersten und zweiten Differentialquotienten. Es ist

$$(IX) \quad \sqrt{1 - n^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{-(\xi^{2/3} - \frac{2}{3} b^{2/3} \xi^{1/3} + \frac{1}{3} a b^{2/3})}{\sqrt{b^{2/3} \xi^{2/3} - \xi^{4/3}}}.$$

Die Curve hat ebenfalls eine Asymptote für  $\xi = 0$  und ein Minimum. Weiter ist nun

$$(X) \quad \sqrt{1 - n^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \frac{b^{2/3} \{\xi^{2/3} - 2 b^{2/3} \xi^{1/3} - 5 a \xi^{2/3} + 4 a b^{2/3}\}}{9 \xi^{7/3} (b^{2/3} - \xi^{2/3})^{3/2}}.$$

Der Wendepunkt ist demnach bestimmt durch eine Wurzel der Gleichung

$$(XI) \quad \begin{cases} \xi^{2/3} - 2 b^{2/3} \xi^{1/3} - 5 a \xi^{2/3} + 4 a b^{2/3} = 0, \\ a = 8,0 \text{ cm}, \quad b = 4,85 \text{ cm}. \end{cases}$$

Die einzige brauchbare Wurzel ist  $\xi = 2,9120$ , und der simultane Wert von  $\eta = 10,500$ .

Wenn man nun nach der Methode von Schellbach umgekehrt wie bei dem obigen Probleme, den Objectpunkt  $P_0$  als fest, das Auge dagegen als beweglich annimmt, so bewegt sich bei zunehmend schiefer Incidenz das Bild  $B_1$  auf der Diakaustik von  $N_1$  aufwärts, das Bild  $B_2$  auf der Normalen  $P_0 M$ ; dabei steht die Brennlinie  $B_1$  senkrecht zur Einfallsebene,

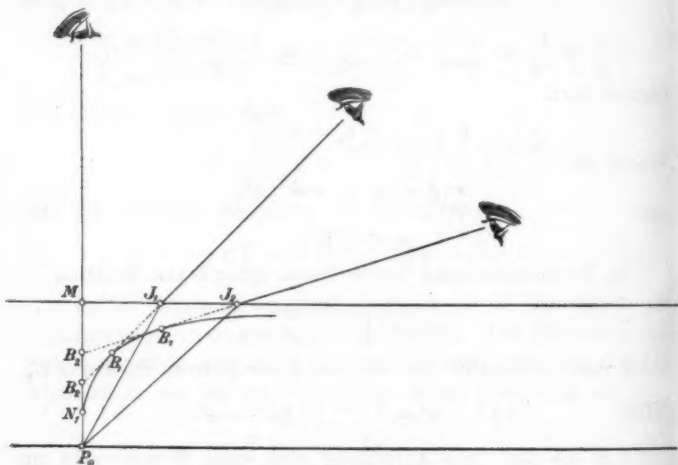


Fig. 2.

und die Brennlinie  $B_2$  in der Einfallsebene; sie fällt überall zusammen mit der Normalen  $P_0 M$ ; die Brennstrecke  $MJ$  wird also bei einem horizontalen Austritt des Strahlenbüschels unendlich gross (Fig. 2). Betrachtet man das Bild mit einem Mikroskop von schwacher Vergrößerung, so erkennt man leicht, dass man dasselbe auf die beiden Bilder  $B_1$  und  $B_2$  verschieden einstellen muss, um die beiden sich im Raume kreuzenden Brennlinien scharf zu sehen.

Rostock, Physik. Inst., Juli 1901.

(Eingegangen 26. Juli 1901.)

**10. Beitrag zur Kenntnis  
der Spitzenentladung aus einem Teslapole;  
von E. Knoblauch.**

(Auszug aus der Rostocker Inaugural-Dissertation.)

Versuche mit den nach Tesla benannten Hochfrequenzwechselströmen haben gezeigt<sup>1)</sup>, dass derartige Ströme, zu einer feinen Metallspitze geführt, eine dieser gegenüberstehende isolirt aufgestellte Metallplatte in Luft in näherer Entfernung stets positiv laden, während in grösserem Abstände die Platte stets negative Ladung zeigt.

In der einschlägigen Literatur<sup>2)</sup> werden zur Erklärung dieser höchst merkwürdigen Erscheinung verschiedene Meinungen ausgesprochen, sodass zur weiteren Aufklärung auf Veranlassung von Hrn. Prof. Wachsmuth die vorliegende Arbeit<sup>3)</sup> unternommen wurde.

Die Erscheinung setzt zunächst voraus, dass sowohl positive wie negative Elektrizität aus der Spitze eines Teslapoles ausströmt, und dass, wie Hr. Himstedt in seiner Arbeit angiebt, die negative Elektrizität eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen kann als die positive; ferner tritt die positive Elektrizität in der Nähe in grösseren Mengen auf, während in weiterem Abstände die negative die Platte allein erreicht.

Um nun ein klares Bild von diesen Entladungserscheinungen erhalten zu können, wurde zuerst genau untersucht, in welchem Verhältnis das an der Spitze gemessene Potential zu dem der in verschiedenen Entfernungen aufgestellten Metallplatte steht. Ferner wurden eingehendere Versuche über den Grund der Umkehr des Ladungssinnes gemacht, indem mit verschieden-

1) F. Himstedt, Wied. Ann. 52. p. 473. 1894; 68. p. 294. 1899.

2) K. Wesendonck, Naturw. Rundsch. 10. p. 401. 1895; A. Pflüger, Wied. Ann. 60. p. 768. 1897.

3) Eine kurze Uebersicht der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit erschien in der Physikalischen Zeitschrift 2. Jahrgang Nr. 11 p. 165—166. 1900.

artig gestalteten Platten experimentirt wurde. Mit gutem Erfolge ist dann die Methode der Lichtenberg'schen Figuren in später näher zu beschreibender Weise angewendet worden.

Zur Erzielung der Hochfrequenzströme wurde während des ganzen Verlaufes der Arbeit die symmetrische Teslaanordnung gewählt, die auch Hr. Himstedt in seiner Arbeit anwandte (Fig. 1).

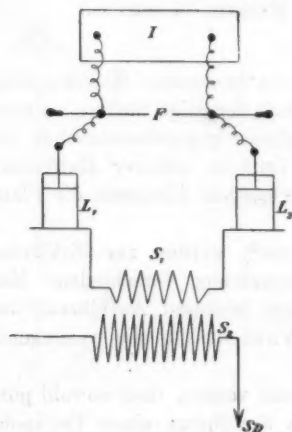


Fig. 1.

*I* Inductorium, *F* Funkenstrecke, *L*<sub>1</sub> und *L*<sub>2</sub> Leydener Flaschen. *S*<sub>1</sub> und *S*<sub>2</sub> primäre und secundäre Teslaspule. *Sp* strahlende Spitze.

Das Siemens'sche Inductorium wurde bei einer Betriebsspannung von 110 Volt mit Maschinenstrom von 3—4 Amp. gespeist. Ein mit Zinkstäben versehenes Funkenmikrometer diente als Funkenstrecke; das knatternde Geräusch der letzteren war bei etwa 17 mm Funkenlänge am stärksten, und die Ausstrahlung der Teslaspitze gab bei dieser die regelmässigsten Resultate. Zur Vermeidung des Ausbleibens der Funkenstrecke mussten die Zinkstäbe einer öfteren Reinigung unterzogen werden.

Die zu allen Versuchen benutzte Spitze war fest montirt in Hartgummi und auf einem mit Millimetertheilung versehenen Brett verschiebbar befestigt; die Spitze bestand aus einer in einen Messingdraht eingelöteten Stahlstecknadel; die Platte war isolirt auf dem Brettchen ihr gegenüber aufgestellt.

Bei den ersten Versuchen wurde sowohl Spitze wie Platte mit je einem statischen Voltmeter in Verbindung gebracht, dessen Ausschläge durch Umwechseln controllirt werden konnten. Eine genaue Ablesung an den Voltmetern zu erreichen, ist nicht leicht, und die Versuchsergebnisse sind mit Sicherheit schwer festzustellen gewesen; einerseits entstehen leicht durch momentanes Aussetzen der Funkenstrecke unregelmässige Ausschläge, andererseits setzte auch öfters durch die Spannungs-

schwankungen in der Centrale der Unterbrecher des Inductoriums aus. Um tadellose Resultate zu erhalten, musste ja nach den von Himstedt und anderen gemachten Erfahrungen die Spitze dauernd strahlen, um einen constanten Potentialwert zu erhalten; ferner musste aber auch die Ablesungszeit nach Möglichkeit gekürzt werden, da, wie auch schon gezeigt wurde, eine dauernd strahlende Spitze von ihrem Anfangspotential allmählich etwas einbüsst.

Messungen wurden wegen der schwankenden Werte zahlreich ausgeführt, und mit einiger Uebung gelingt es, die erhaltenen Resultate übereinstimmend zu bekommen.

In der nachstehenden Tabelle bedeutet  $a$  den Abstand Spitze-Platte in Millimetern;  $v_1$  das Spitzen-,  $v_2$  das Plattenpotential. In diese Tabelle sind zwei Werte von  $v_1$  und  $v_2$ , und von  $v_1'$  und  $v_2'$  eingereiht, die bei verschieden eingestellter Funkenstrecke erhalten und zum Vergleich nebeneinander gestellt wurden. Die Zahlen unter  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_1'$  und  $v_2'$  bilden den absoluten Wert der Spannung in Volts  $\times 10^2$ , wie er an den Messinstrumenten abgelesen wurde.

$v_1$	$v_2$	$v_1'$	$v_2'$	$a$	$v_1$	$v_2$	$v_1'$	$v_2'$	$a$
1	1	3,4	3,4	0	8	7,1	7	7	17
1	1	3,2	2,4	1	8	7	7	6,7	18
1	2	4	3	2	8	6,8	7	6,2	19
0,2	1,7	4	2,8	3	8	6,5	7	5,9	20
0,1	1,5	3	2,8	4	8	6,2	7	5,5	21
0,1	1,2	2,5	2,2	5	8	6,3	7	5	22
0,2	1,7	2,2	1,7	6	8	5,8	7	4,4	23
1	1,8	2,2	1,8	7	8	5	7	3,7	24
1,2	1,4	2,7	2	8	8	4,6	7	3,2	25
1,8	1,8	2,7	2	9	8	3,8	7	2,8	26
2,3	2,8	2,7	2,7	10	8	3	7	2,2	27
4,5	5	3	2,8	11	8	2,1	7	1,6	28
8,5	7	6	7	12	8	1,8	7	1,4	29
9	7,5	9	8,7	13	8	1,4	7	1,4	30
8	7,7	8,5	8	14	8	1,2	7	1,2	35
8	7,2	8	7,7	15	8	0,8	7	0,5	40
8	7,2	7,5	7,5	16					

Auf der dann folgenden Skizze (Fig. 2) findet man Platten- und Spitzenpotential in Volts als Function des Plattenabstandes

aufgetragen. Es ist dabei zu bemerken, dass das augenscheinlich plötzliche Maximum bei beiden Curven an der Stelle eintritt, an der das directe Funkenspiel Spitze-Platte erlischt. Es erreichen an dieser Stelle beide Potentiale ihren maximalen Wert, und, während das Spitzenpotential constant bleibt, klingt das Plattenpotential allmählich ab.

Der Verlauf der Curve des Spitzenpotentials erklärt sich vielleicht so, dass beim Funkenspiel die auf der Spitze angesammelte Elektrizitätsmenge einen hohen Spannungswert nicht erreichen kann, da fortdauernd durch die Funken eine heftige

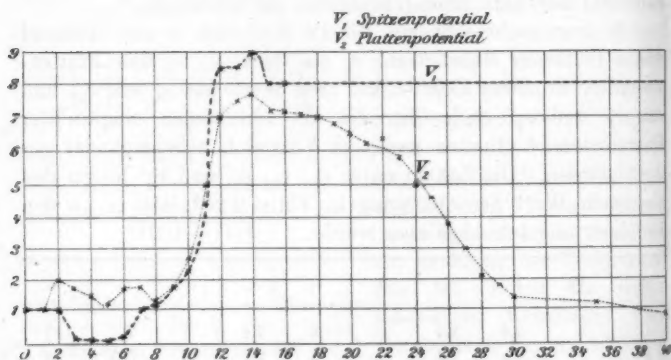


Fig. 2.

Entladung eintritt. Klingt dagegen das Funkenspiel allmählich ab, so treten natürlich Maximalwerte auf, da nun die Spitze immer so lange geladen wird, bis die Ausstrahlung aus ihr an die Luft erfolgen kann. Interessant ist nun, dass auch das Plattenpotential in demselben Augenblick seinen Maximalwert erreicht, wie das der Spitze. Man muss daher annehmen, dass die strahlende Elektrizität im Gegensatz zu dem Funkenübergang auf der Platte gewissermassen einen Ansammlungswert der Spannung bewirkt, der natürlich an der Stelle unmittelbar hinter dem Aufhören des Funkenspiels seinen Maximalwert erreichen muss.

Eigentümlich und unerklärt bleibt aber der Abfall des Spitzenpotentials sofort hinter seinem Maximum auf den dann dauernd constant bleibenden Wert.

Genauere Messungen mit den Voltmetern auszuführen, war leider nicht möglich, da dieselben nur bis 100 Volt hinabgehen. Als Maximalwert des Plattenpotentials konnte bei passender Regulirung der Funkenstrecke im 14 mm-Abstande Spitze-Platte eine Spannung von 3800 Volt gemessen werden.

Zu den folgenden Untersuchungen wurde ein Thomson'sches Quadrantenelektrometer benutzt, welches durch Verlängerung der bifilaren Aufhängung möglichst empfindlich gemacht war; durch sorgfältige Reinigung der Isolation der Quadrantenpaare wurde eine dauernde Nulllage gesichert.

Der Nadel wurde mit einer Zamboni'schen Säule hohe Ladung zugeteilt, ein Quadrantenpaar zur Erde abgeleitet, das andere mit der Platte verbunden.

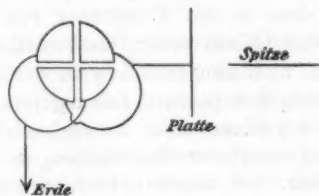


Fig. 3.

Durch Projection eines im Spiegel des Instrumentes aufgefangenen Glühlampenfadens auf eine Scala wurde eine Beobachtung der Ausschläge unter gleichzeitiger Verschiebung der Spitze ermöglicht, sodass man ohne Gehülfen die Ausschläge des Spiegels beobachten konnte.

Die in der Arbeit von Hrn. Himstedt gefundene Umkehr der positiven in die negative Ladung wurde in sicherer Weise erhalten; die Versuche gelangen sogar mit Hülfe eines Bohnenberg'schen Elektroskops in der einfachsten Weise. Der leerlaufende Teslapol lag hierbei nicht unter Oel, sondern etwas abgebogen frei in der Luft; Störungen dadurch konnten nicht beobachtet werden.

Am besten lassen sich diese Experimente ausführen, wenn man bei etwa 6 cm Spitzenabstand mit der Strahlung beginnt, dann vorsichtig und langsam die Spitze der Platte nähert. Man kann deutlich beobachten, wie bei etwa 4 bis

5 cm Abstand die Nadel des Instrumentes in lebhafte Zuckungen gerät, einmal positive, einmal negative Ladung zeigen will, um dann nach positiver Seite definitiv auszuschlagen.

Der nächstliegende Gedanke war nun, zu untersuchen, ob zwischen der Plattengrösse und dem Sinn der Ladung irgend ein Zusammenhang besteht. Zu diesem Zweck wurden Platten von 18, 8, 3 und 1 cm Durchmesser hintereinander angewendet; es zeigte sich aber immer dieselbe Erscheinung; die neutrale Zone, wenn man die Stelle so nennen kann, bei der die Ladung weder ausgesprochen positiv noch negativ ist, lag stets an derselben Stelle und die erste positive Ladung konnte stets bei dieser Versuchsanordnung bei 40—42 mm festgestellt werden.

Ein jetzt im abgedunkelten Experimentirzimmer angestellter Versuch zeigte, dass in der Entfernung von 40 mm gerade noch aus der Spitze Glimm- oder Büschelentladungen auf die Platte übergingen, und man kam nun zu der Annahme, dass hierdurch die Platte ihre positive Ladung erhalten muss.

Wenn es jetzt gelänge, diese Büschelentladungen zu verhindern, direct auf die Platte überzugehen, so könnte es vielleicht möglich sein, die negative Ladung auch bei näherer Entfernung dauernd auf einer Platte zu erhalten. Um dies nun zu erreichen, wurden Versuche mit kreisrund ausgeschnittenen Zinkplatten angestellt.



Fig. 4.

Die Zinkplatten hatten einen Durchmesser von 18 cm und enthielten Ausschnitte von 11 (10... bis 2 cm herab) Durchmesser (Fig. 4).

Jetzt gelang es nun thatsächlich, eine Platte mit nur negativer Ladung zu versehen. Im Dunkeln kann man deutlich sehen, dass dann auch keine Büschelentladungen direct auf die Platte mehr übergehen, sondern der Strahlenbüschel befindet sich in dem Ausschnitt der Platte; es scheint also aus dem Teslapole positive und negative Elektrizität gleichzeitig auszuströmen, so zwar, dass die positive Ausstrahlung gewissermassen mantelförmig von der negativen umgeben wird.

(Diese mantelförmigen Entladungsvorgänge gelang es bei späteren Versuchen noch auf andere Weise experimentell nachzuweisen.)



## Versuchsreihe mit ausgeschnittenen Platten.

$l_1, l_2, l_3$  sind drei nebeneinander ausgeführte Messungen und bedeuten für die Lage der Umkehrpunkte den Abstand Spitze-Platte in Millimetern;  $a$  stellt den Durchmesser der ausgeschnittenen Kreise in Centimetern dar:

Tabelle der Umkehrpunkte.

$l_1$	$l_2$	$l_3$	$a$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$a$
40	40	40	0	39	36	37	5
35	30	35	2	27	20	19	6
35	40	40	3	20	18	21	7
40	40	39	4	10	12	11	8

Wird der Ausschnitt grösser als 8 cm, so erhält die Platte überhaupt keine positive Ladung mehr.

Aus den vorliegenden Messungen ergibt sich: Je grösser der Ausschnitt ist, um so näher rückt der Umkehrpunkt des Ladungssinnes an die Spitze heran bez. umgekehrt, je kleiner der Ausschnitt wird, desto weiter liegt der Punkt der ersten positiven Ladung von der Spitze ab.

Um in einfacher experimenteller Weise zur Erklärung dieser Erscheinungen weiteres Material zu bieten, wurde jetzt die Methode der Lichtenberg'schen Staubfiguren gewählt. Die weiter unten folgenden Versuche stiessen zuerst auf hartnäckige Schwierigkeiten, die vor allem dem hohen Feuchtigkeitsgrad der Luft von 60—72 Proc. durch die Nähe der Ostsee zuzuschreiben waren.

Zu Hülfe kam die Arbeit von K. Antolik,<sup>1)</sup> in der eine vorzügliche Methode zur Herstellung von Lichtenberg'schen Figuren beschrieben ist.

Als die Luft durch Annäherung der Wintermonate zum Experimentiren geeigneter wurde, gelang es auch in der einfachsten Weise solche Figuren herzustellen; doch ist ihr Charakter ein anderer, und es soll darum von diesen erst später die Rede sein.

1) K. Antolik, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. p. 5. 1891/92.

Es folgen zunächst Versuche nach der Methode von K. Antolik:

Ein grosser Glaskolben von 10 l Inhalt wurde mit warmem Wasser von ca.  $60^{\circ}\text{C}$ . gefüllt und isolirt auf einer Glasplatte vor die strahlende Spitze gesetzt. Hr. Antolik empfiehlt in seiner Arbeit, dem Kolben von innen her eine kleine elektrische Ladung zu geben, da dann die Figuren in viel grösseren Dimensionen und ausgesprochener Schönheit zu stande kommen.

Die Versuchsanordnung war nun etwa die folgende (Fig. 5):

Mit einer Influenzmaschine *J* wurde unter Zwischenschaltung eines Funkenmikrometers *F* eine bestimmte abgezählte Funkenzahl durch eine eingelegte Messingkette *K* in das

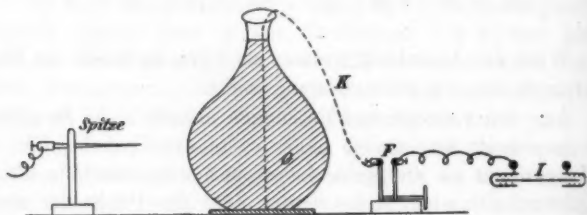


Fig. 5.

Innere des Kolbens *G* abgegeben. Durch die Innenladung wirkte der Kolben wie ein Condensator. Zur Erzielung von guten brauchbaren Figuren ist es nötig, den Kolben vor jeder Bestäubung sorgfältig mit Alkohol zu reinigen.

Da ein Fixiren der Figuren in der sonst üblichen, wohl zuerst von v. Bezold angegebenen Weise des Abklatschens mit schwarzem Seidenpapier, welches mit Gummilösung bestrichen wird, durch die Kugelform des Kolbens unmöglich gemacht war, und zur Herstellung einer fortlaufenden Serie von Lichtenberg'schen Figuren in verschiedenem Spitzenabstande ein solches Fixiren notwendig wurde, musste zur photographischen Methode geschritten werden.

Um das auf einem gewöhnlichen blanken Glaskolben sich stets bildende Spiegelbild zu entfernen, musste der Kolben auf einer Hälfte durch Schleifen mittels Schmirgels mattirt werden. Dem blossen Auge am deutlichsten sichtbar werden die

Lichtenberg'schen Figuren auf dem Glaskolben, wenn das Wasser in ihm leicht gefärbt wird, etwa mit einigen Tropfen Tinte. Bei der photographischen Aufnahme zeigte sich aber, dass das Rot der aus dem Schwefel-Mennigepulver erhaltenen Figuren auf die photographische Platte wenig einzuwirken vermag; aus diesem Grunde wurde daher der Kolben mit etwas Milch weiss gefärbt, sodass sich das Rot auf dem weissen Untergrunde etwas kräftiger abheben konnte. Zum Bestäuben wurde Schwefel-Mennigepulver zu gleichen Teilen angewendet, mit diesem wurden zweifellos die besten Resultate gewonnen, nachdem auch das Dreipulvergemisch, angegeben von Hrn. A. Bürker<sup>1)</sup>, ausprobiert worden war. Für die einzelnen Aufnahmen war es notwendig, dass der Kolben vom photographischen Apparat eine constante Entfernung hatte, um einen Vergleich der Dimensionen der einzelnen Figuren zu ermöglichen. Dies wurde so erreicht, dass der Kolben in eine dem Apparat gegenübergestellte Holzecke geschoben wurde.

Die Lichtenberg'schen Figuren wurden nun in einer fortlaufenden Reihe von 2 zu 2 mm in folgender Weise hergestellt. Die Influenzmaschine wurde langsam angedreht, so dass jedesmal 10 Funken von 10 mm Länge übergingen, dann wurde der Primärkreis der Teslaanordnung eingeschaltet, und 15 Secunden der Kolben der Spitzenstrahlung ausgesetzt. Bei der Ladung mit der Influenzmaschine ist wohl darauf zu achten, dass sich die Maschine nicht während einer Versuchsdauer umladet, da dies eine Störung in dem Charakter der Figuren hervorrufen kann. Jetzt erfolgte das Bestäuben mit Schwefel-Mennigepulver, nachdem jedesmal das Innere des Kolbens mit der Hand durch Berührung der Kette zur Erde abgeleitet war. Nach 1 bis 2 Minuten wurde dann der Kolben vor den Apparat gesetzt und die Aufnahme erfolgte.

Nach einigen misslungenen Versuchen kam man empirisch dazu, mit dem Fortnehmen des Kolbens nach der Bestäubung einige Zeit zu warten, da dann das Pulvergemisch besser anzuhäften scheint.

Die folgenden Figuren zeigen solche Aufnahmen: Fig. 6 in 0 mm, Fig. 7 in 2 mm Abstand Spitze-Kolben. Der innere

1) A. Bürker, Ann. d. Phys. 1. p. 474. 1900.

Kranz positiven Charakters war prächtig ausgebildet, in Kreisform herum sind deutlich negative Ringe sichtbar. Die offenbar negativen Scheiben im Innern des positiven Kranzes rühren wohl vom directen Funkenspiel her, denn sie verschwinden, sobald dieses erlischt (vgl. auch Figg. 10—13).

Weitere Beispiele für eine solche Serie sind in Figg. 10—15 bei wachsendem Abstände gegeben. Ihre Herstellung geschah



Fig. 6.

aber ohne Glaskolben und wird erst weiter unten beschrieben (vgl. p. 366).

Auf der jetzt folgenden Skizze findet man eine solche Serie von Figuren in ihren Umrissen aufgetragen. Der grosse Halbkreis deutet in  $\frac{1}{2}$  Naturgrösse hierbei den Kolben an, während die einzelnen Curven,  $ab$ ,  $ac$ ,  $a'b'$ ,  $a'c'$  etc. immer die Verbindung der strahlenden Spitze mit dem Durchmesser der negativen Kreise  $bc$ ,  $b'c'$  etc. der Lichtenberg'schen Figuren bilden (vgl. Fig. 8). Die Lage der strahlenden Spitze

wird durch die Punkte  $a$ ,  $a^1$ ,  $a^2$  etc. gegeben; die Spitze ist dabei immer um die passende Millimeterzahl verschoben gedacht.

Die Ausstrahlung der Spitze bildet also einen Kegel, dessen Winkel immer stumpfer wird, je mehr man der Spitze einen Gegenstand nähert. Dabei scheint auf der glatten Oberfläche des Kolbens ein Gleiten der Entladungserscheinungen vor sich

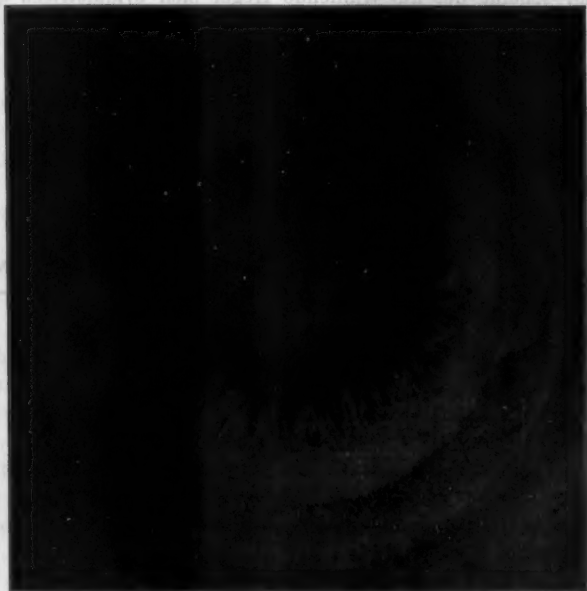


Fig. 7.

zu gehen, so zwar, dass der Strahlenkegel sich gewissermassen an die Wandung des Kolbens anzuschmiegen sucht, denn selbst eine Tangente, an die Kugelschale gelegt, würde z. B. von  $a^3$  nicht den Punkt  $b^3$  treffen können.

Unter der Kugelschale in Fig. 8 sind die Durchmesser der auf dem Kolben erhaltenen Lichtenberg'schen Figuren durch parallele Gerade dargestellt, deren Abstand voneinander dem zugehörigen Spitzenabstand entspricht. Die Endpunkte der Geraden sind durch eine Curve verbunden, die bei ca. 15 mm

Spitzenabstand ein Maximum erreicht, welches beim Abklingen des directen Funkenspieles eintritt; nach diesem findet eine fortschreitende Zunahme der Dimensionen der Figuren statt, denn nach 40 mm Spitzenabstand war der äussere negative Kreis nicht mehr auf dem Kolben sichtbar.

Je weiter man den Kolben von der Spitze entfernt, desto mehr scheint der ausstrahlende Kegel sich symmetrisch nach

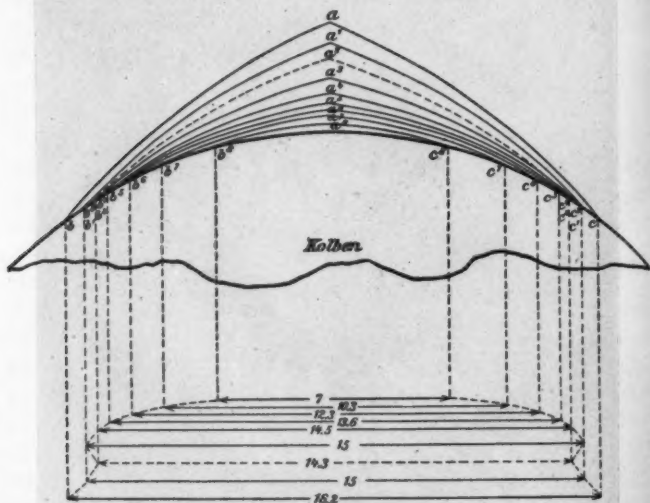


Fig. 8.

beiden Seiten auszubreiten. Hr. Warburg hat in einer jüngst erschienenen Arbeit<sup>1)</sup> auf diesen Strahlungskegel bei statischer Spitzenstrahlung hingewiesen, er sagt dort: „Bei der Spitzenstrahlung ist das Stromgebiet nahezu ein Kegel, dessen Spitze in der geladenen Spitze liegt . . .“

Einen Versuch, den Strahlungskegel auf directem Wege zu fixiren, um eventuell auch bei ganz freier Strahlung mit seinem Winkel bekannt zu werden, findet man in der folgenden Fig. 9.

<sup>1)</sup> E. Warburg, Ann. d. Phys. 2. p. 295. 1900.

Hier wurde die ausstrahlende Spitze unmittelbar vor die photographische Camera gesetzt und nachdem die Funkenstrecke absolut abgedunkelt war, exponirt. Das Bild zeigt die Strahlungsspitze mit einem Lichthauch umgeben, aus dem heftige Büschelentladungen stattfinden; am äussersten Teil der Spitze sieht man den Strahlungskegel unter einem Winkel von ca.  $120^\circ$  deutlich ansetzen.

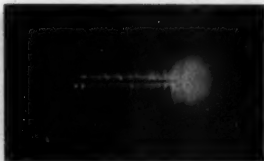


Fig. 9.

Bei den jetzt folgenden Untersuchungen wurde auf die Anwendung der Kolbenmethode verzichtet, und eine auf der Rückseite mit Stanniol belegte, sauber polirte Hartgummiplatte benutzt. Zu diesen Versuchen gehören die Figg. 10—15, und Fig. 17.

In ähnlicher Weise wie mit dem Kolben wurden Figuren gewonnen<sup>1)</sup>, indem nämlich die Rückseite der Hartgummiplatte, also die Stanniolbelegung, mit Hilfe der Influenzmaschine und einer dazwischen geschalteten Funkenstrecke mit einer leichten Ladung versehen wurde. In den so erhaltenen Figuren konnte nichts Neues gefunden werden, nur dass auf dem Glaskolben die Figuren schöner und regelmässiger erschienen waren. Im übrigen findet bei der angewendeten Vergrösserung des Abstandes von 4 zu 4 mm Spitze-Hartgummiplatte ebenfalls eine allmähliche Zunahme der Dimensionen der Figuren statt; diese Figuren wurden mit schwarzem Seidenpapier abgeklatscht, und sind wohl deshalb interessant, weil sie leidlich die Farben der so entstandenen Figuren zeigen.

Frühere Versuche ohne die Ladung mit der Influenzmaschine auf einer Hartgummiplatte auch in weiterem Abstände Spitze-Platte Lichtenberg'sche Figuren zu erhalten, waren fehlgeschlagen, doch kam die trocknere Jahreszeit zu Hilfe; um auch diese Versuche gelingen zu lassen.

Hr. Himstedt hat in seiner Arbeit<sup>2)</sup> wohl solche Versuche schon gemacht, da er dort angiebt:

„Erzeugt man Lichtenberg'sche Figuren mit dem Pole eines Inductoriums, so erhält man je nach dem benutzten Pole

1) Dieselben sind in der Dissertation reproducirt.

2) F. Himstedt, Wied. Ann. 52. p. 481. 1894.

oder je nach der Stromrichtung positive oder negative Figuren. Bei der Teslaspule dagegen erhält man stets positive Figuren.<sup>4</sup>

Die folgende Serie von Figuren (Figg. 10—15) zeigt, dass man ohne weiteres die Figuren nicht rein positiv nennen kann;



Fig. 10. 0 mm.



Fig. 11. 4 mm.



Fig. 12. 8 mm.

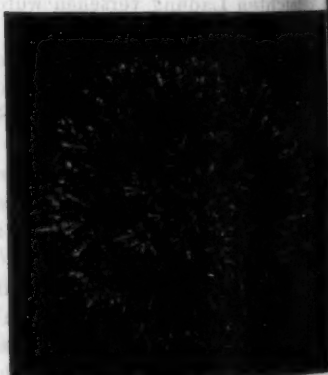


Fig. 13. 14 mm.

die ersten Figuren beweisen vielmehr, dass aus einem Teslapole thatsächlich positive und negative Elektrizität gleichzeitig ausströmt; die zuerst erhaltenen Figuren ähneln denjenigen, die man bei der oscillirenden Entladung einer Leydener Flasche



erhält, der man eine Spitze anhängt. Die Spitze wurde immer von 2 zu 2 mm weiter von der Platte entfernt und dann eine neue Figur gebildet<sup>1)</sup>; man erhält dann so lange den Charakter der oscillirenden Leydener Flaschenentladung, bis das directe Funkenspiel aufhört und nur noch starke Büschelentladungen ausströmen; dann erst wird der Charakter der Lichtenberg'schen Figuren ein rein positiver; die folgenden Figuren zeigen ein langsames Abklingen der positiven Ladung.

Die Versuche, in weiterer Entfernung etwa nur negative Ladung zu erhalten, sind nicht sicher gelungen, da die Hart-

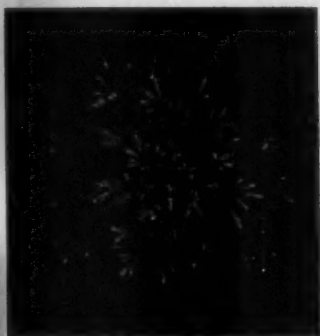


Fig. 14. 18 mm.



Fig. 15. 22 mm.

gummiplatte, ohne Ladung, mit Schwefel-Mennigepulver bestreut, fast dasselbe Bild zeigte, wie nach der Ladung.

Jedenfalls lässt sich aus diesen Versuchen der sichere Schluss ziehen, dass die positiven Ladungen auf der früher benutzten Metallplatte nur durch die Büschelentladungen erhalten wurden; die gewonnenen positiven Figuren zeigen aber ausserdem, dass die positive Elektrizität in der Verlängerungslinie der Spitze am kräftigsten zu wirken vermag, da in dieser Richtung noch positive Ladungsteilchen auf die Platte gelangen, während für die nicht centralen Teilchen die Kraft zur Erreichung der Hartgummiplatte nicht mehr auszureichen scheint.

1) In der Dissertation ist die vollständige Serie der Figuren reproducirt.

Diese Versuchsergebnisse stehen in gutem Einklange mit denen, die früher erhalten wurden mit den ausgeschnittenen Platten, bei denen bei kleiner werdendem Innenkreis der Punkt der ersten positiven Ladung sich immer weiter von der Spitze entfernt.

Das Bild einer strahlenden Teslaspitze muss man sich nach den vorliegenden Experimenten etwa, wie Fig. 16 zeigt, vorstellen.

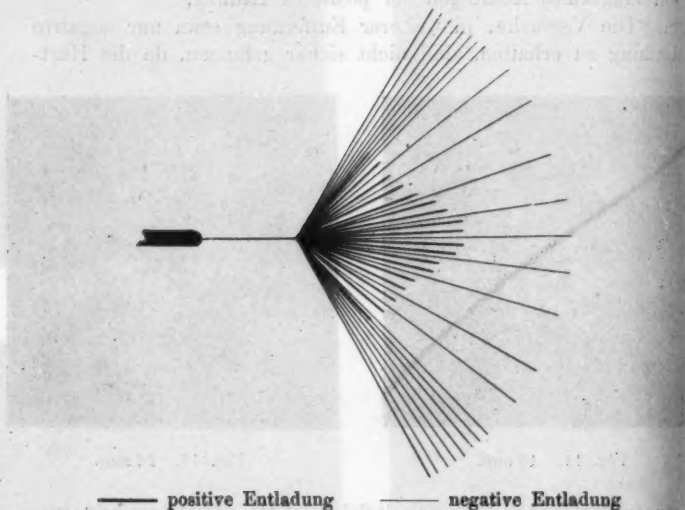


Fig. 16.

Die positive Ausstrahlung, in der Figur durch stärkere Linien markiert, klingt nach den Seiten zu allmählich ab und zeigt ihr Maximum in der Verlängerungslinie der Spitze bei ca. 40—42 mm Abstand; dem gut im Dunklen ausgeruhten Auge ist die positive Büschelentladung sichtbar; die negative Ausstrahlung gruppirt sich in der Hauptsache um die positive herum, bleibt zwar dem Auge unsichtbar, wirkt aber noch auf eine vor die Spitze gesetzte Metallplatte in einem Abstand vom 75—100 cm.

In Fig. 17 ist eine Lichtenberg'sche Figur von ausgesprochener Schönheit in  $\frac{1}{2}$  Naturgröße gezeigt; diese ent-

stand dadurch, dass der leerlaufende Teslapol mit der Stanniolbelegung der Hartgummiplatte verbunden wurde, während der andere Pol an die etwa 1 cm davon entfernte, isolirt aufgestellte Spitze geführt wurde; interessant ist es, dass die Charakteristik dieser Figur der von Fig. 10 entspricht.

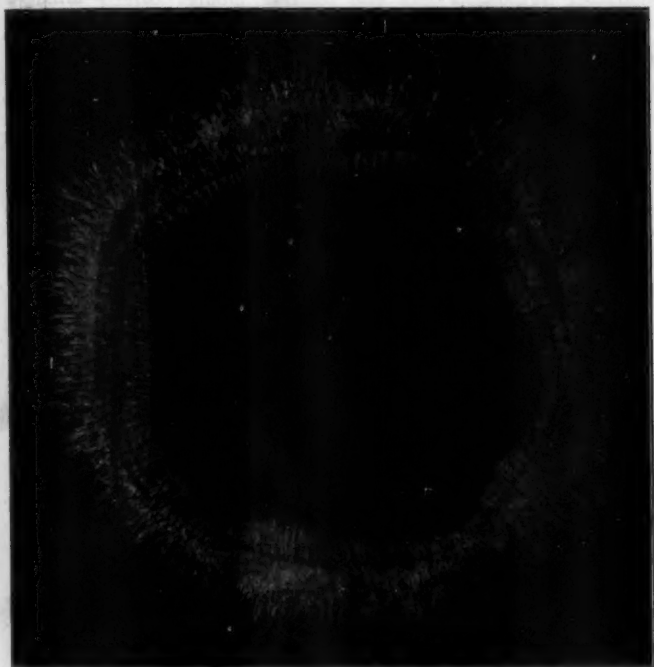


Fig. 17.

Um die Gleichzeitigkeit der positiven und negativen Ausstrahlung zu zeigen, hat Hr. Himstedt in seiner Arbeit<sup>1)</sup> der ausstrahlenden Spitze gegenüber eine isolirte Metallplatte von 20 cm Durchmesser aufgestellt, die mit einem Ausschnitt

1) F. Himstedt, l. c. 68. p. 800. 1899.

versehen war. Hinter dieser Metallplatte stellte er eine zweite auf; ihre Abstände liessen sich dann, wie auch eigene Versuche zeigten, so reguliren, dass die erste Scheibe positive, die zweite negative Ladung erhält.

Da es mir nun gelang, eine solche mit einem Ausschnitt versehene Platte in jeder Entfernung nur mit negativer Ladung zu versehen, so müsste in diesem Fall eine hinter der ersten stehende zweite isolirte Platte von den Büschelentladungen der Spitze getroffen werden und positive Ladung zeigen; diese Versuche gelangen nicht, selbst bei Anwendung von noch grösseren Ausschnitten. Man muss nämlich, um der Platte positive Ladung zu erteilen, diese auf mindestens 40 mm der Spitze nähern; es erhielt dann aber auch die erste Platte positive Ladung, da ja der Strahlungswinkel bei Annäherung einer Platte stumpfer wird, und so die erste Platte ebenfalls treffen muss.

In der That wird wohl, wie Hr. Himstedt weiter in seiner Arbeit ausführt, die negative Elektricität sich weiter in den Raum fortzuflanzen vermögen wie die positive; ob dies aber in der Verschiedenheit ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder an dem Charakter der Ausströmungserscheinungen selbst liegt, scheint mir nur noch eine offene Frage zu bleiben.

Versuche, das sichtbare Strahlenbündel mit Hülfe eines kräftigen elektromagnetischen Feldes abzulenken, um eventuell auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten schliessen zu können, sind nicht gelungen. Um eine Ablenkbarkeit zu erhalten, müssten die Strahlen etwa durch zwei hintereinander aufgestellte Blenden geführt werden, wie bei den entsprechenden Versuchen mit Kathoden- und Becquerelstrahlen verfahren wurde; dies gelang nicht, andererseits gelangen auch Versuche nicht mit Lichtenberg'schen Figuren, die ihre Form durch das einwirkende Magnetfeld verändern könnten.

#### Kurze Uebersicht der Hauptresultate.

1. *Eine Teslaspitze* hat kein constantes Potential, wenn man ihr in variirtem Abstände eine Metallplatte gegenüberstellt. Ihre Maximalspannung zeigt sie in dem Augenblick, in dem

das directe Funkenspiel Spitze-Platte abklingt; kurz darauf wird das Potential erst constant.

2. *Das Potential* der der Spitze gegenüberstehenden Metallplatte erhält seinen Maximalwert an gleicher Stelle.

3. *Die positive Ladung*, welche die einer Spitze gegenübergestellte Platte erhält, stammt aus den sichtbaren Büschelentladungen der Spitze.

a) Verhindert man das Auftreffen dieser Büschelentladungen auf die Platte dadurch, dass man die Platte in geeigneter Weise ausschneidet, so lässt sich dieselbe selbst in nächstem Abstände niemals mit positiver Ladung versehen.

b) Die Figg. 10—15 zeigen, dass, solange auf eine Hartgummiplatte von der Spitze Büschelentladungen auftreffen, sich positive sternförmige Lichtenberg'sche Figuren ausbilden.

4. *Eine Teslaspitze* strahlt positive und negative Elektrizität gleichzeitig aus.

a) Beim Funkenspiel Spitze-Platte bilden sich Lichtenberg'sche Figuren aus, die den Charakter einer oscillirenden Leydener Flaschenentladung haben, die negative Ladung befindet sich flächenförmig in der Mitte, während sich die positive sternförmig um diese gruppirt.

b) Stellt man nach Himstedt eine mit einem Ausschnitt versehene Platte so auf, dass sie positive Ladung erhält, und eine zweite in regulirtem Abstände hinter diese, so erhält diese negative Ladung.

5. *Die Ausstrahlung* aus der Spitze geschieht in Form eines Kegels, dessen äusserer Mantel ausschliesslich negative Elektrizität und dessen Inneres vorwiegend positive Büschelentladungen enthält.

(Hierbei ist wohl zu beachten, dass diese Thatsache nur für die Strahlung gilt, nicht aber für die directen Funkenentladungen.)

6. *Der Winkel*, den die strahlende Elektrizität bildet, vergrössert sich bei Annäherung einer Platte, er beträgt bei freier Strahlung in Luft ca.  $120^\circ$ .

7. *Die positive Elektrizität* scheint in der Verlängerungslinie der Spitze am kräftigsten zu wirken, da die letzten posi-

tiven Ladungen auf der Hartgummiplatte sich dicht um diese gruppieren. Vgl. Fig. 16.

Am Schlusse danke ich herzlichst sowohl meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. Wachsmuth für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Ratschläge, als auch dem Director des physikalischen Institutes Hrn. Prof. Dr. Matthiessen für das freundliche Interesse, das er mir stets entgegengebracht hat.

(Eingegangen 31. Juli 1901.)

11. *Symbolische Integrale der elektromagnetischen Gleichungen, aus dem Anfangszustand des Feldes abgeleitet, nebst Andeutungen zu einer allgemeinen Theorie physikalischer Operatoren;*  
*von Ludwig Silberstein.*

Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in einem vollkommen isolirenden Medium, von der Dielektricitätsconstanten  $K$  und der magnetischen Permeabilität  $\mu$ , können in der Form

$$(I) \quad \begin{cases} A K \frac{\partial E}{\partial t} = \text{curl } M, \\ A \mu \frac{\partial M}{\partial t} = - \text{curl } E \end{cases}$$

geschrieben werden, falls man unter  $A$  das bekannte Verhältnis der Einheiten, unter  $t$  die Zeit, unter  $E$  und  $M$  die resultierende elektrische, bez. magnetische Kraft (als Vektoren) versteht, die zur Zeit  $t$  in einem beliebigen Punkte des Feldes herrscht. Ist das Medium isotrop, so sind  $K$  und  $\mu$  einfache Multiplicatoren; ist es hingegen krystallinisch, so haben  $K$  und  $\mu$  die Bedeutung von linearen Vectoroperatoren. Im übrigen kann das betrachtete Dielektricum homogen oder heterogen sein und die Zahlenwerte von  $K$  und  $\mu$  können im allgemeinen an gewissen Flächen discontinuirlich werden, sofern es sich um Körper handelt, die in einem gemeinsamen Medium tauchen oder aber um Körper von verschiedener Beschaffenheit, die sich miteinander im Contact befinden. Es sei jedoch vorausgesetzt, dass sämtliche Körper, sowie auch das dieselben umgebende Medium selbst, wenigstens in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Gebietes, unbeweglich sind und gar keine elektrische Leitfähigkeit besitzen.

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an, dass für irgend einen Zeitpunkt  $t_0$  und für alle Punkte des betrachteten Raumgebietes die elektrische Kraft  $E_0$  und die magnetische  $M_0$  gegeben sind, und es werden diese Vektoren für alle Punkte dieses Gebietes für irgend einen anderen Zeitpunkt  $t$  gesucht,



welcher dem Augenblicke  $t_0$  vorangeht oder auf denselben folgt; in anderen Worten: man kennt den gegenwärtigen Zustand eines elektromagnetischen Feldes und wolle daraus seine Vergangenheit und Zukunft herleiten.

Sind die Kräfte  $E, M$  (immer als Vektoren aufgefasst) und deren Ableitungen nach der Zeit  $E', E'', \dots E^{(n)}$  etc.,  $M', M'', \dots M^{(n)}$  sämtlich endliche und stetige Functionen der Zeit<sup>1)</sup>, wenigstens innerhalb des betrachteten Raumgebietes und für das ganze Zeitintervall  $t_0 - t$  (die Grenzen  $t_0, t$  mitbegriffen), so können wir den Taylor'schen Lehrsatz anwenden, und indem wir (ohne Schaden für die Allgemeinheit der Untersuchung)  $t_0 = 0$  setzen, erhalten wir

$$(1) \quad E_t = E_0 + \frac{t}{1!} E'_0 + \frac{t^2}{2!} E''_0 + \frac{t^3}{3!} E'''_0 + \dots,$$

$$(2) \quad M_t = M_0 + \frac{t}{1!} M'_0 + \frac{t^2}{2!} M''_0 + \frac{t^3}{3!} M'''_0 + \dots$$

Von den Grössen, welche in diesen unendlichen Reihen auftreten, sind direct, ausser der Zeit  $t$ , nur die anfänglichen Vektoren  $E_0, M_0$  selbst bekannt; setzt man jedoch voraus, dass wenigstens in dem betrachteten Gebiete und während der ganzen Zeitepoche  $0 - t$  die elektromagnetischen Gleichungen (I) gültig sind, so kann man ohne weiteres sämtliche Derivirten  $E_0^{(i)}, M_0^{(i)}$  durch die Kräfte  $E_0, M_0$  selbst ausdrücken.

In der That, leitet man diese Gleichungen nach der Zeit ab und berücksichtigt man, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{curl} = \text{curl} \frac{\partial}{\partial t},$$

so ergeben sich leicht die nötigen Grössen:

$$(3) \quad \begin{cases} E'_0 = + \frac{1}{AK} \text{curl} M_0, & M'_0 = - \frac{1}{A\mu} \text{curl} E_0, \\ E''_0 = - \frac{1}{AK \cdot A\mu} \text{curl}^2 E_0, & M''_0 = - \frac{1}{A\mu \cdot AK} \text{curl}^2 M_0, \\ E'''_0 = - \frac{1}{(AK)^2 \cdot A\mu} \text{curl}^3 M_0, & M'''_0 = + \frac{1}{(A\mu)^2 \cdot AK} \text{curl}^3 E_0, \\ E^{(4)}_0 = + \frac{1}{(AK)^2 \cdot (A\mu)^2} \text{curl}^4 E_0, & M^{(4)}_0 = + \frac{1}{(A\mu)^2 \cdot (AK)^2} \text{curl}^4 M_0, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

1) welche auch den sonstigen Bedingungen der Entwickelbarkeit in ganze Potenzen genügen.



die Regel zur Bildung eines  $E_0^{(i)}$ ,  $M_0^{(i)}$  von beliebiger Ordnung ist aus dieser Zusammenstellung ohne weiteres zu ersehen. (Unter  $\text{curl}^i R$  ist das Resultat der an  $R$   $i$  mal nacheinander ausgeführten Operation „curl“ zu verstehen.)

Setzt man nun die Ausdrücke (3) etc. in die betreffenden Reihenentwickelungen (1), (2) ein und bezeichnet das Product  $A^2 \mu K$  mit  $1/v^2$ , d. h. setzt man den absoluten Wert von  $v$  gleich

$$(4) \quad v = \frac{1}{\sqrt{A^2 \mu K}},$$

so erhält man

$$E_t = \left[ E_0 - \frac{(v t)^2}{2!} \text{curl}^2 E_0 + \frac{(v t)^4}{4!} \text{curl}^4 E_0 - \frac{(v t)^6}{6!} \text{curl}^6 E_0 + \dots \right] \\ + \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{v t}{1!} \text{curl} M_0 - \frac{(v t)^3}{3!} \text{curl}^3 M_0 + \frac{(v t)^5}{5!} \text{curl}^5 M_0 - \dots \right],$$

$$M_t = \left[ M_0 - \frac{(v t)^2}{2!} \text{curl}^2 M_0 + \frac{(v t)^4}{4!} \text{curl}^4 M_0 - \dots \right] \\ - \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{v t}{1!} \text{curl} E_0 - \frac{(v t)^3}{3!} \text{curl}^3 E_0 + \frac{(v t)^5}{5!} \text{curl}^5 E_0 - \dots \right],$$

oder — symbolisch —:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} E_t &= \left\{ 1 - \frac{(v t \cdot \text{curl})^2}{2!} + \frac{(v t \cdot \text{curl})^4}{4!} - \dots \right\} E_0 \\ &+ \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \left\{ \frac{(v t \cdot \text{curl})}{1!} - \frac{(v t \cdot \text{curl})^3}{3!} + \dots \right\} M_0, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} M_t &= \left\{ 1 - \frac{(v t \cdot \text{curl})^2}{2!} + \frac{(v t \cdot \text{curl})^4}{4!} - \dots \right\} M_0 \\ &- \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} \cdot \left\{ \frac{(v t \cdot \text{curl})}{1!} - \frac{(v t \cdot \text{curl})^3}{3!} + \dots \right\} E_0, \end{aligned} \right.$$

worin (wie kaum zu bemerken nötig) die  $\{\}$  die Bedeutung zusammengesetzter Operatoren besitzen, welche auf die bezüglichen Vektoren  $E_0$ ,  $M_0$  zu appliciren sind. Diese Operatoren enthalten die in Betracht kommende Zeit  $t$ , dann  $v$ , welches die Dimensionen einer Geschwindigkeit hat (und als „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ bekannt ist) und eine Grösse (Quantität) im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist (unabhängig davon, dass allgemein, d. h. für ein anisotropes Medium,  $\mu$  und  $K$  keine Quantitäten oder Multiplicatoren, sondern Vectoroperatoren sind) und schliesslich den „curl“, welcher bereits ein ziemlich complicirter Operator ist und deren

Dimensionen (symbolisch gesprochen) die eines Linienintegrals dividirt durch einen Flächeninhalt, d. h. also die einer reciproken Länge sind:  $[\text{curl}] = [l^{-1}]$ ; dies alles ist in den zusammengesetzten Operatoren  $\{\}$  in (5) und (6) in der Combination  $\varphi = v t \text{curl}$  enthalten, welche die Dimension Null hat, von der Wahl der Einheiten der Zeit und der Länge also sicher unabhängig ist und insofern einer *reinen* (unbenannten) Zahl verglichen werden kann, trotzdem sie — allgemein zu reden — nicht eine Grösse, sondern ein Operator ist.

Dessen ungeachtet möchte ich vorschlagen (mit der grösstmöglichen Vorsicht) zwei Operatoren einzuführen, die noch complicirter als  $\varphi = v t \text{curl}$ , und zwar *aus* demselben (oder — wenn man will — aus einem *beliebigen* Operator  $\varphi$ , dem jedoch die „Dimensionen“ einer *reinen* Zahl zukommen) zusammengesetzt sind, nämlich die Operatoren:  $\{\cos(\varphi)\}$  und  $\{\sin(\varphi)\}$ , welche aus  $\varphi$  so gebildet seien, als wäre  $\varphi$  ein gewisser Winkel, welche wir aber — unabhängig von jedem geometrischen Begriffe — durch die beiden wohlbekannten unendlichen Reihen

$$(7) \quad \{\cos(\varphi)\} = \left\{ 1 - \frac{(\varphi)^2}{2!} + \frac{(\varphi)^4}{4!} - \dots \right\},$$

$$(8) \quad \{\sin(\varphi)\} = \left\{ \frac{(\varphi)}{1!} - \frac{(\varphi)^3}{3!} + \frac{(\varphi)^5}{5!} - \dots \right\},$$

definirt haben wollen, zu denen man dann Zuflucht nehmen wird, so oft man befürchten sollte, den Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$ ,  $\{\sin(\varphi)\}$  Eigenschaften zuzuschreiben, welche den Eigenschaften der entsprechenden trigonometrischen Functionen analog wären.

Führt man nun diese beiden Operatoren ein, so kann man den Gleichungen (5) und (6) eine ziemlich elegante Form verleihen, indem man nämlich schreibt:

$$(A) \quad E_t = \{\cos(v t. \text{curl})\} E_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(v t. \text{curl})\} M_0,$$

$$(B) \quad M_t = \{\cos(v t. \text{curl})\} M_0 - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(v t. \text{curl})\} E_0.$$

Die so gefundenen Formeln liefern uns den elektrischen Vector  $E_t$  und den magnetischen  $M_t$ , für den Augenblick  $t$  und für einen beliebigen Punkt des betrachteten Gebietes, und zwar ausgedrückt (wiewohl auch in symbolischer Weise) durch

die Vektoren  $E_0, M_0$ , — die für den Augenblick  $t=0$  und für den betrachteten Punkt mit seiner nächsten Umgebung bekannt sind, — und durch die Länge des Zeitintervalles  $t$ . In gewissen Fällen kann der Operator „ $\text{curl}$ “ zu einem gewöhnlichen Multiplicator desjenigen Vectors werden, an dem die Operation auszuführen ist; alsdann erhalten die Operatoren  $\{\}$  der Formeln (A), (B) die Bedeutung gewöhnlicher trigonometrischer Functionen von einem Argument, welches proportional mit der Zeit  $t$  ist. Ist aber dies nicht der Fall, so müssen sie, wie oben gesagt, als zusammengesetzte Operatoren behandelt werden. Oft ist zwar „ $\text{curl}$ “ kein Multiplicator, hingegen ist es aber  $\text{curl}^2$ , sagen wir  $\text{curl}^2 = n^2$ ; alsdann wird der symbolische Cosinus einfach gleich  $\cos(nvt)$ , — da er nur die geraden Potenzen von  $\text{curl}$  enthält, — während man wegen der Bedeutung von  $\{\sin(vt.\text{curl})\}$  auch in diesem Falle zu der unendlichen Reihe (8) recurriren muss. Jedenfalls aber (wenn bloß die anfänglichen Vektoren  $E_0, M_0$  als Functionen des Ortes gegeben sind) wird man die entsprechenden Operationen immer ausführen können, indem man, im schlimmsten Falle, auf ihre ursprüngliche, in (7) und (8) gegebene Bedeutung zurückkommen wird.

Die Fundamenteigenschaften der Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$ ,  $\{\sin(\varphi)\}$ , wo — in unserem Falle —  $\varphi$  eine Abkürzung für  $v t . \text{curl}$  ist, kann man ohne weiteres finden, indem man sich die entsprechenden Eigenschaften der ihnen in einem gewissen Sinne correspondirenden trigonometrischen Functionen erinnert, oder (um sicherer vorzugehen) indem man sie aus den Reihen (7) und (8) ableitet. So sieht man z. B. sofort, dass

$$(9) \quad \{\cos(-\varphi)\} = \{\cos(\varphi)\},$$

$$(10) \quad \{\sin(-\varphi)\} = -\{\sin(\varphi)\}$$

ist, wenn  $\varphi$  entweder deshalb das Vorzeichen wechselt, dass man  $-t$  (anstatt  $+t$ ) nimmt, oder weil die anfängliche Verteilung der Vektoren sich dahin änderte, dass man anstatt  $+ \text{curl}$  zu setzen hat  $- \text{curl}$ . — Quadriert man die Reihen (7) und (8), summirt die Resultate und sammelt man die Coefficienten einer jeden Potenz von  $\varphi$ , so findet man, dass die Factoren einer jeden Potenz von  $\varphi$  identisch Null sind und

dass nur der Factor 1 der nullten Potenz stehen bleibt, und damit wird dann die Eigenschaft

$$(11) \quad \{\cos(\varphi)\}^2 + \{\sin(\varphi)\}^2 = 1$$

bewiesen, die in unserem Falle den folgenden Sinn hat: Führt man an irgend einem Vector  $R$  zweimal hintereinander die Operation  $\{\cos(\varphi)\}$  und dann — an demselben Vector  $R$  — zweimal hintereinander die Operation  $\{\sin(\varphi)\}$  aus, so erhält man zwei Vektoren  $R_1$  und  $R_2$ , deren geometrische Summe (Resultante) mit dem ursprünglichen Vector  $R$  identisch ist (d. h.:  $R_1 = \{\cos(\varphi)\}^2 R$  und  $R_2 = \{\sin(\varphi)\}^2 R$  sind die Seiten eines Parallelogrammes, wovon  $R$  die Diagonale ist). In dieser Weise könnte man auch, aus den Reihen (7) und (8), sämtliche anderen Fundamenteigenschaften der in Rede stehenden Operatoren und ihre gegenseitigen Beziehungen herleiten.

Es wird aber vielleicht nicht ohne Interesse sein, wenn wir hier bemerken, dass gewisse (wenn nicht alle) Eigenschaften dieser Operatoren in einer viel einfacheren und lehrreichen Weise aus ihrem wahren physikalischen Sinne selbst abgeleitet werden können, d. h. aus dem Umstande, dass, wenn man sie in einer gewissen (in den Formeln (A), (B) angegebenen) Weise auf dasjenige applicirt, was sich auf den gegenwärtigen Zustand des elektromagnetischen Feldes bezieht und denselben definirt ( $E_0, M_0$ ), sie uns dessen Vergangenheit oder Zukunft ( $E_t, M_t, t \geq 0$ ) liefern. Um z. B. die Beziehung (11) zu erhalten, können wir folgende Betrachtung anstellen: wenn unsere Operationen, auf dasjenige ( $E_0, M_0$ ) applicirt, was sich auf den gegenwärtigen Zustand bezieht ( $t=0$ ), uns den Zustand ( $E_t, M_t$ ) des Systems in irgend einem anderen (früheren oder späteren) Augenblick ( $t$ ) liefern, so muss man, wenn man an diesem letzteren Zustand dieselben Operationen mit geändertem Vorzeichen von  $t$  ausführt, wieder auf den ursprünglichen Zustand zurückkommen. Uebersetzt man dieses Raisonnement in die Sprache der Formeln und wendet die Beziehungen (9) und (10) an, so erhält man in der That:

$$E_0 = \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} E_t - \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} M_t,$$

$$M_0 = \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} M_t + \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} E_t,$$

und wenn man nun hierin  $E_i$ ,  $M_i$  [wie in (A), (B)] durch  $E_0$ ,  $M_0$  ausdrückt:

$$E_0 = \{\cos(vt \cdot \text{curl})\}^2 E_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} M_0 \\ - \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} M_0 + \{\sin(vt \cdot \text{curl})\}^2 E_0, \\ \text{und analog für } M_0;$$

man ersieht ohne weiteres, dass

$$\{\cos(\ )\} \{\sin(\ )\} = \{\sin(\ )\} \{\cos(\ )\}$$

ist, sodass das zweite und dritte Glied rechts sich gegenseitig aufheben und man das Resultat

$$[\{\cos(\varphi)\}^2 + \{\sin(\varphi)\}^2] E_0 = E_0$$

erhält; das analoge Ergebnis folgt, wenn man die auf  $M_0$  bezügliche Formel in eben derselben Weise entwickelt.

In ähnlicher Weise könnte man für die in Frage stehenden Operatoren z. B. auch die Correlative der bekannten trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1,$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2$$

beweisen, indem man nämlich einmal von  $t=0$  direct zu  $t=t_1+t_2$ , das andere Mal aber von  $t=0$  zu  $t=t_1$  und dann von  $t_1$  zu  $t_1+t_2$  übergehen und die beiden so gewonnenen Resultate einander gleichsetzen würde; so könnte man auch andere, mehr oder weniger complicirte Processe ausfindig machen, um viele andere Eigenschaften der besagten Operatoren zu erhalten, analog den Beziehungen, die für die trigonometrischen Functionen, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, gültig sind.

Aus den Definitionen (7) und (8) folgt für irgend einen Vector  $R$ , der eine Function des Ortes, von der Zeit jedoch unabhängig ist (wie z. B.  $E_0$  oder  $M_0$ ), und für  $\varphi = vt \cdot \text{curl}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\cos(\varphi)\} R = -v \cdot \{\sin(\varphi)\} \text{curl } R,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\sin(\varphi)\} R = v \cdot \{\cos(\varphi)\} \text{curl } R;$$

wendet man diese Derivationsregeln auf die in (A), (B) gegebenen Ausdrücke von  $E_i$ ,  $M_i$  an und substituirt  $v^2 = 1/A^2 \mu K$ ,

so findet man ohne weiteres die elektromagnetischen Differentialgleichungen (I) verificirt.

Da  $\{\cos(0)\} = 1$  und  $\{\sin(0)\} = 0$  ist, so schliesst man aus (A), (B) unmittelbar, dass, wenn  $\text{curl } E_0 = 0$  und  $\text{curl } M_0 = 0$ , für jedes positive oder negative  $t$ :  $E_t = E_0$ ,  $M_t = M_0$  ist, d. h.: ist die Verteilung der elektrischen und der magnetischen Kraft in irgend einem Teile des betrachteten Gebietes auch nur in einem einzigen Augenblicke irrotational, so war und wird *dieser* Teil des Feldes immer unveränderlich, d. h. für alle Zeiten, welche zusammen mit jenem Augenblicke zu derselben Epoche der Continuität und der Gültigkeit der Gleichungen (I) gehören; oder in anderen Worten: die Irrotationalität (von  $E$ ,  $M$ ), sei es auch nur für einen einzigen Zeitmoment einer Epoche von besagtem Charakter, bildet die *hinreichende* Bedingung für die Unveränderlichkeit eines beliebigen Teiles des Feldes für die ganze Dauer der Epoche und unabhängig von dem Sachverhalt in anderen (nicht angrenzenden) Gebieten des Feldes. Das dies auch die *notwendige* Bedingung ist, folgt ohne weiteres aus den Gleichungen (I) selbst.

Im Besonderen (wenn nämlich überall  $E_0 = M_0 = 0$  ist) folgt aus dem oben Gesagten, dass weder ein elektrisches, noch ein magnetisches, noch auch ein elektromagnetisches (rotationales oder irrotationales) Feld in irgend einem Augenblicke einer Epoche von besagtem Charakter geschaffen werden können, und dass also die Schöpfung (Erzeugung) eines jeden dieser Felder notwendigerweise eine Verletzung der elektromagnetischen Gleichungen (I) oder der Stetigkeitsbedingungen (wenn nicht der ersteren und der letzteren zugleich) involvirt, und auf diese Weise das Ende *einer* und den Anfang einer anderen, neuen „Epoche“ markirt.

Aber auch wenn  $E_0$  und  $M_0$  nur in einem gewissen, beliebig grossen oder beliebig kleinen Gebiete des betrachteten Raumes gleich Null sind, folgt aus (A), (B), dass  $E_t$ ,  $M_t$  beständig gleich Null sein müssen, sodass ohne Verletzung der genannten Bedingungen nicht einmal eine „Fortpflanzung“ der elektrischen und magnetischen Kräfte von Gebieten, wo sie bereits existiren, zu solchen, wo sie noch gar nicht vorhanden sind, vor sich gehen kann. In der That hat man auch in

diesem Falle beim Uebergang von den ersteren zu den letzteren Regionen eine Discontinuitätsfläche (oder ein System solcher Flächen); es werden also hier, nach Gleichung (I), die Derivierten von  $E$  oder von  $M$  oder von allen beiden Kräften, in Bezug auf die Zeit genommen, unendlich werden können, so dass es für diejenigen Punkte, die in oder unendlich nahe an diesen Flächen liegen, nicht erlaubt ist, den Taylor'schen Satz anzuwenden und unsere Formeln (A), (B) an diesen Stellen also ihre Gültigkeit verlieren; die Fortpflanzung elektromagnetischer Zustände implicirt in *diesem Falle* die Existenz einer solchen Unstetigkeitsfläche auch in den nachfolgenden Zeitmomenten und also eine Verletzung der Stetigkeitsbedingungen in den aufeinanderfolgenden Stellen auch derjenigen Region, wo ursprünglich keine elektrischen und magnetischen Kräfte wirken, d. h. eine Fortbewegung der ursprünglichen Discontinuitätsfläche selbst, mit oder ohne Deformation derselben. (Ähnliche Bemerkungen über die „Fortpflanzung“ könnte man übrigens auch in Bezug auf die Theorien der Deformationen und Oscillationen in elastischen Körpern und vieler anderen Erscheinungsklassen machen.)

Diese Schwierigkeiten<sup>1)</sup> bleiben wohl aus, sobald die Bedingungen der Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Raumgebietes erfüllt sind; aber auch in diesem Falle kann man die „Fortpflanzung“ der elektromagnetischen Zustände aus unseren Formeln (A), (B) nicht direct herauslesen; dies geschieht jedoch aus einem Grunde, welcher eben eine charakteristische Eigenschaft dieser Lösungen [(A), (B)] bildet; in der That sehen wir in ihnen die (elektromagnetische)

1) In den diesbezüglichen Fällen kann man die Unstetigkeitsfläche als Grenzfall einer sogenannten (continuirlichen) Uebergangsschicht betrachten, was auch z. B. dann geschieht, wenn man (für ebene oder sphärische Wellen) die Function einer (einzigen) geometrischen Variablen, welche eine discontinuirliche Anfangsvertheilung ausdrückt, in eine Fourierreihe:

$$f_{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n [a_k \sin(k p x) + b_k \cos(k p x)]$$

entwickelt und die actualle discontinuirliche Function  $f(x)$  als den Limes der stetigen Function  $f_{(n)}(x)$  betrachtet

$$(f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{(n)}(x)).$$



Vergangenheit und Zukunft in einem jeden individuellen Punkte durch den gegenwärtigen Zustand ausgedrückt, welchen wir in eben demselben Punkte und in seiner nächsten Umgebung (was zur Ausführung der Operation „curl“ nötig ist) vorfinden, ganz unabhängig aber davon, was in anderen Stellen des Raumes geschieht oder früher geschehen ist. Um die Fortpflanzung elektromagnetischer Zustände in Evidenz zu bringen und die Geschwindigkeit der Fortpflanzung<sup>1)</sup> numerisch zu finden, müsste man die Lösungen (A), (B) in gehöriger Weise umformen, was in gewissen Fällen eine leichte Aufgabe ist; es wäre übrigens vielleicht überflüssig, hier daran zu erinnern, dass es im allgemeinen, d. h. in einem beliebigen elektromagnetischen Felde, nicht erlaubt ist, ohne weiteres davon zu sprechen, was in den allereinfachsten Fällen, z. B. für ebene oder kugelförmige Wellen, den Namen und den Charakter einer Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Kräfte annimmt. —

Die Formeln (A), (B) eignen sich gut für die beinahe unmittelbare Herleitung gewisser allgemeiner Theoreme, die mir neu zu sein scheinen, und deren Herleitung auf anderem Wege nicht leicht sein dürfte, mir aber jedenfalls unbekannt ist.

Betrachtet man nämlich zwei vom gegenwärtigen gleich abstehende Augenblicke, d. h. also: einen  $(-t)$  in der Vergangenheit, den zweiten  $(+t)$  in der Zukunft, und alle beide in ein und derselben Epoche der Continuität und der Gültigkeit der Gleichungen (I), so erhält man — auf Grund von (9) und (10) —:

$$(12) \quad \begin{cases} E_{+t} + E_{-t} = 2 \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} E_0, \\ E_{+t} - E_{-t} = 2 \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} M_0, \end{cases}$$

und analog

$$(13) \quad \begin{cases} M_{+t} + M_{-t} = 2 \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} M_0, \\ M_{+t} - M_{-t} = 2 \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} E_0, \end{cases}$$

d. h.: die (geometrische) Summe der elektrischen Kräfte, die in einem Punkte des Feldes zu zwei verschiedenen und beliebig

1) Welche bekanntlich in denjenigen Fällen, in welchen man von einer solchen sprechen darf, gleich  $v = 1/\sqrt{K\mu}$  wird.



gewählten Zeiten vorgefunden werden, hängt nur ab von der Verteilung der <sup>elektrischen</sup> <sub>magnetischen</sub> Kraft im mittleren Zeitpunkte, während die (geometrische) Differenz der <sup>elektrischen</sup> <sub>magnetischen</sub> Kräfte, die in zwei beliebigen Augenblicken wirken, nur von der Verteilung der <sup>magnetischen</sup> <sub>elektrischen</sub> Kraft im mittleren Augenblick in der Umgebung des betrachteten Punktes abhängt.

Als Specialfall dieses Theorems erhalten wir (indem wir nämlich  $\text{curl } E_0 = 0$  oder  $\text{curl } M_0 = 0$  setzen) den folgenden Satz: Ist in einem Augenblick  $t_0$  die Verteilung der elektrischen Kraft (um einen Punkt herum oder in irgend einem Gebiete von endlicher Ausdehnung) irrotational, so ist die Summe der elektrischen Kräfte (Vektoren) für zwei andere von  $t_0$  gleich abstehende Zeitmomente, — einem früheren und einem späteren, — der Grösse und Richtung nach gleich der doppelten elektrischen Kraft, die im Augenblicke  $t_0$  herrscht:

$$E_{t_0+t} + E_{t_0-t} = 2 E_{t_0} \quad (\text{falls } \text{curl } E_0 = 0);$$

in demselben Falle sind die magnetischen Kräfte in zwei von  $t_0$  gleich abstehenden Zeitmomenten, einem früheren und einem späteren, der Richtung und Grösse nach einander gleich:

$$M_{t_0+t} = M_{t_0-t} \quad (\text{falls } \text{curl } E_0 = 0).$$

Einen ganz analogen Satz erhalten wir, wenn anstatt der elektrischen die magnetische Kraft irrotational verteilt ist. — Ist aber, in irgend einem Gebiete, zu gleicher Zeit sowohl die Verteilung der elektrischen als auch die der magnetischen Kraft irrotational, so kommen wir auf den schon oben erwähnten Fall zurück, in welchem der betreffende Teil des Feldes, in einer ganzen „Epoche“ von besagtem Charakter, überhaupt unveränderlich bleibt. —

(Specialfall.) Ist die anfängliche Verteilung der Kräfte dadurch gekennzeichnet, dass die Beziehungen

$$(14) \quad \text{curl } E_0 = f \cdot E_0, \quad \text{curl } M_0 = g \cdot M_0$$

bestehen, wo  $f$  und  $g$  scalare Grössen sind und — allgemein zu reden — Functionen des Ortes sein können, so wird der Operator „curl“ einfach zu einem scalaren Multiplicator desjenigen Vectors, an welchem die Operation auszuführen ist,

d. h. also gleich  $f$ , sofern man die Operation an  $E_0$ , und gleich  $g$ , insofern man sie an dem Vector  $M_0$  auszuführen hat, sodass unsere zusammengesetzten Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$ ,  $\{\sin(\varphi)\}$  sich in diesem Falle auf einfache trigonometrische Functionen reduciren, mit denen man die Vektoren  $E_0$ ,  $M_0$  scalar zu multipliciren hat, und die allgemeinen Formeln (A), (B) übergehen in:

$$(15) \quad E_t = E_0 \cdot \cos(f v t) + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot M_0 \cdot \sin(g v t),$$

$$(16) \quad M_t = M_0 \cdot \cos(g v t) - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot E_0 \cdot \sin(f v t);$$

für ein isotropes Medium sind  $\mu$  und  $K$  scalare Coefficienten, sodass sowohl  $E_0$  als auch  $M_0$  (welche Vektoren sind) in (15) und (16) mit einfachen Scalaren multiplicirt auftreten, die vom Ort abhängen und periodische Functionen der Zeit sind; die betreffenden Perioden sind

$$(17) \quad T_s = \frac{2\pi}{v \cdot f}, \quad T_m = \frac{2\pi}{v \cdot g}$$

und können also für verschiedene Punkte des Feldes verschiedene Werte haben; die betreffenden Schwingungszahlen sind

$$(18) \quad n_s = \frac{v}{2\pi} f, \quad n_m = \frac{v}{2\pi} g;$$

führt man diese letzteren in (15), (16) ein, so hat man:

$$(19) \quad E_t = E_0 \cdot \cos(2\pi n_s t) + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot M_0 \cdot \sin(2\pi n_m t),$$

$$(20) \quad M_t = M_0 \cdot \cos(2\pi n_m t) - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot E_0 \cdot \sin(2\pi n_s t).$$

In dem betrachteten Falle sind also die Kräfte  $E_t$  und  $M_t$  zu jeder Zeit Resultanten je zweier Vektoren, von welchen ein jeder einfach harmonische Schwingungen von der Frequenz  $n_s$  bez.  $n_m$  ausführt; ein jeder dieser Teilvectoren behält seine Richtung ungeändert (nicht aber seinen Sinn); die resultirenden Kräfte  $E_t$ ,  $M_t$  erfahren aber nicht nur Intensitätsänderungen, sondern im allgemeinen (d. h. wenn die anfänglichen Vektoren  $E_0$ ,  $M_0$  nicht zufällig einander parallel sind) auch *Richtungsänderungen*.

Die Frequenzen  $n_s$ ,  $n_m$  können zwar Functionen des Ortes sein, jedoch nicht ganz willkürliche; da nämlich

$$\text{div. curl } R = 0$$

ist (für irgend einen Vector  $R$ ), so müssen als Consequenz von (14) überall die Bedingungen  $\text{div}(f E_0) = 0$ ,  $\text{div}(g M_0) = 0$ , d. h.

$$(21) \quad \text{div}(n_e \cdot E_0) = 0, \quad \text{div}(n_m \cdot M_0) = 0$$

erfüllt sein; führt man z. B. die orthogonalen Coordinaten  $x, y, z$  ein und bezeichnet mit  $X, Y, Z$  die rechtwinkligen Componenten der elektrischen, mit  $\alpha, \beta, \gamma$  die der magnetischen Kraft, so kann man die letzteren Bedingungen schreiben:

$$(21a) \quad \begin{cases} 0 = n_e \cdot \text{div} E_0 + \left( X_0 \frac{\partial n_e}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial n_e}{\partial y} + Z_0 \frac{\partial n_e}{\partial z} \right), \\ 0 = n_m \cdot \text{div} M_0 + \left( \alpha_0 \frac{\partial n_m}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial n_m}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial n_m}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Ist die anfängliche Verteilung sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Kraft *solenoidal*, d. h.

$$\text{div} E_0 = \text{div} M_0 = 0,$$

so reducirt sich (21 a) auf:

$$(22) \quad \begin{cases} 0 = X_0 \frac{\partial n_e}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial n_e}{\partial y} + Z_0 \frac{\partial n_e}{\partial z}, \\ 0 = \alpha_0 \frac{\partial n_m}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial n_m}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial n_m}{\partial z}, \end{cases}$$

d. h.: im *Anfangszustand* liegen sowohl die elektrischen wie die magnetischen Kräfte in den *Flächen constanter Frequenz* der Schwingungen der entsprechenden Teilvectors, d. h. in den Flächen

$$n_e = \text{const. bez. } n_m = \text{const.}$$

Für beliebige Zeiten  $t$  folgt nun aus (19) und (20):

$$(23) \quad \begin{cases} \text{div} E_t = \text{div} E_0 \cdot \cos(f v t) + \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \text{div} M_0 \cdot \sin(g v t) \\ - v t \cdot \sin(f v t) \cdot \left[ X_0 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + Z_0 \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ + v t \cdot \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \cos(g v t) \cdot \left[ \alpha_0 \frac{\partial g}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial g}{\partial z} \right] \end{cases}$$

und eine analoge Gleichung für  $\text{div} M_t$ ;

wenn also  $\text{div} E_0 = \text{div} M_0 = 0$  ist und die anfänglichen Vektoren  $E, M$  in den betreffenden Flächen  $f = \text{const.}$ ,  $g = \text{const.}$  liegen, so hat man auch für ein beliebiges  $t$ :  $\text{div} E_t = 0$ ,

$\text{div } M_t = 0$ , d. h. eine solenoidale Verteilung der beiden Kräftearten; die Ausdrücke

$$X_t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Y_t \frac{\partial f}{\partial y} + Z_t \frac{\partial f}{\partial z} \\ = \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \sin(g v t) \cdot \left[ \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

und der analoge für

$$\alpha_t \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \beta_t \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma_t \frac{\partial g}{\partial z}$$

sind aber im allgemeinen von Null verschieden, sodass die elektrischen und magnetischen Kräfte *nicht immer* in den Flächen constanter Frequenz:  $f = \text{const.}$ ,  $g = \text{const.}$  liegen, sondern dieselben periodisch verlassen und zu ihnen periodisch wiederkehren. Nur wenn  $f = g$  oder — allgemeiner — wenn  $f$  eine Function von  $g$  allein ist, sodass die beiden Flächenschaaren in eine einzige Schaar zusammenfallen, hat man auch für jedes  $t$ :

$$X_t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + + = 0, \quad \alpha_t \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + + = 0,$$

d. h. es liegen in diesem Falle die Kräfte  $E_t$ ,  $M_t$  dauernd in den Flächen constanter Schwingungsfrequenz. —

Die Dichte der elektrischen, bez. der magnetischen Energie ist für ein isotropes Medium durch  $\frac{1}{2} K E^2$ , bez.  $\frac{1}{2} \mu M^2$  gegeben; bezeichnet man mit  $E_t$  die Dichte der elektromagnetischen Energie, die in irgend einem Punkte des Feldes zur Zeit  $t$  herrscht:

$$(24) \quad E_t = \frac{1}{2} (K E_t^2 + \mu M_t^2),$$

so erhält man für den betrachteten Fall (in welchem die Bedingungen (14) für die anfängliche Verteilung erfüllt sind), indem man die Gleichungen (15) und (16) quadriert und mit  $||$  ein scalares Product bezeichnet:

$$E_t = \frac{1}{2} K E_0^2 \cdot \cos^2(f v t) + \frac{1}{2} \mu M_0^2 \cdot \sin^2(g v t) \\ + (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \sin(g v t) \cdot \cos(f v t) \\ + \frac{1}{2} \mu M_0^2 \cdot \cos^2(g v t) + \frac{1}{2} K E_0^2 \cdot \sin^2(f v t) \\ - (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \sin(f v t) \cdot \cos(g v t),$$

oder

$$(25) \quad E_t = E_0 + (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \cdot \sin[(g - f) v t],$$

wo  $E_0$  den anfänglichen Wert der elektromagnetischen Energiedichte bedeutet. Aus dieser bemerkenswerten Formel ersieht

wir ohne weiteres, dass in dem betrachteten Specialfalle die Energiedichte  $E_t$  überall periodische Aenderungen erfährt, deren Periode  $T = 2\pi/v(g-f)$  in verschiedenen Punkten des Feldes verschieden sein kann; die Amplitude des in der Zeit veränderlichen Theiles von  $E_t$  ist proportional

$$|E_0 M_0| \text{ oder } E_0 \cdot M_0 \cdot \cos(E_0, M_0);$$

bilden in irgend einem Punkte die Kräfte  $E_0, M_0$  miteinander einen rechten Winkel, so bleibt ebendasselbst die Energiedichte unveränderlich:  $E_t = E_0$ ; dasselbe findet auch statt, falls  $f = g$  ist, in welchem Falle auch die resultirenden elektrischen und magnetischen Kräfte [vgl. (15), (16)] zu einfachen periodischen Functionen der Zeit werden. —

Einen einfachen Ausdruck findet man in diesem Falle auch für den sogenannten (Poynting'schen) „elektromagnetischen Energiefluss“, dessen Dichte (Intensität pro Flächeneinheit) durch das mit  $A$  dividirte *Vectorproduct* von  $E$  und  $M$  gegeben ist:

$$(26) \quad F_t = \frac{1}{A} V E_t M_t;$$

erinnert man sich der Regeln für die Vectorproducte:

$$V A B = - V B A, \quad V A A = 0,$$

$$V(A+B)(C+D) = V A C + V A D + V B C + V B D,$$

so erhält man aus (15) und (16) ohne Schwierigkeit:

$$F_t = [\cos(fv t) \cdot \cos(gv t) + \sin(fv t) \cdot \sin(gv t)] \frac{V E_0 M_0}{A},$$

oder

$$(27) \quad F_t = F_0 \cdot \cos[(f-g)vt];$$

es ist also auch der Vector  $F_t$ , der die Dichte des Energieflusses darstellt, eine periodische Function der Zeit, von derselben Periode wie  $E_t$ , die elektromagnetische Energiedichte; ist  $f = g$ , so hat man dauernd  $F_t = F_0$ , d. h. einen unveränderlichen Energiefluss.

Kehren wir jetzt zu dem allgemeinen Fall, in welchem die anfängliche Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte in *irgend einer* Weise gegeben ist, wieder zurück. Eliminirt man aus dem Gleichungssystem (I) den Vector  $M$ ,

bez. den Vector  $E$ , und bezeichnet mit dem Symbol  $D$  die Derivation nach der Zeit  $t$ , so erhält man

$$(1a) \quad \frac{1}{v^2} D^2 E = -\text{curl}^2 E, \quad \frac{1}{v^2} D^2 M = -\text{curl}^2 M,$$

oder aber die Aequivalenz der beiden Operatoren

$$(28) \quad v^2 \cdot \text{curl}^2 = -D^2,$$

insofern die betreffenden Operationen an  $E$  oder an  $M$  auszuführen sind. Der Operator  $D$  implicirt die Zeit und kann folglich nicht ausgeführt werden an etwas, was sich nur auf einen einzigen Zeitmoment bezieht, wie z. B.  $E_0$  oder  $M_0$ ; dank der Beziehung (28) wird dieser Operator einem anderen äquivalent, welcher nur den Begriff des *Raumes* (der räumlichen Verteilung) implicirt (und den man deshalb vielleicht einen rein „geometrischen“ Operator nennen könnte), und kann sehr wohl an einem Vector ausgeführt werden, von dem man bloss die augenblickliche Verteilung kennt; bezeichnet man das in diesem Sinne aufgefasste  $D$  mit  $D_\omega$ , so kann man [nach (28)] symbolisch schreiben:

$$(29) \quad i D_\omega = \pm v \cdot \text{curl}, \text{ wo } i = +\sqrt{-1} \text{ ist.}$$

Führt man nun dieses Symbol in die zusammengesetzten Operatoren  $\{ \}$  der Formeln (A), (B) ein, so kann man sie schreiben:

$$(30) \quad \begin{cases} E_t = \{ \cos(i t D_\omega) \} E_0 \pm \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \{ \sin(i t D_\omega) \} M_0, \\ M_t = \{ \cos(i t D_\omega) \} M_0 \mp \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} \cdot \{ \sin(i t D_\omega) \} E_0; \end{cases}$$

aus den Gleichungen (I) folgt aber, in symbolischer Schreibweise:

$$(31) \quad \begin{cases} M_0 = A K \frac{D_\omega}{\text{curl}} E_0 = \mp i \cdot A K v \cdot E_0, \\ E_0 = -A \mu \cdot \frac{D_\omega}{\text{curl}} M_0 = \pm i A \mu v \cdot M_0, \end{cases}$$

und da

$$\left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot A K v = \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} A \mu v = 1$$

ist, so können wir die Formeln (30) schreiben:

$$E_t = \{ \cos(i t D_\omega) \} E_0 + i \{ \sin(i t D_\omega) \} E_0,$$

$$M_t = \{ \cos(i t D_\omega) \} M_0 + i \{ \sin(i t D_\omega) \} M_0,$$

oder kürzer

$$(32) \quad \frac{E_t}{M_t} = \left\{ \cos(-i t D_\omega) + i \sin(-i t D_\omega) \right\} \frac{E_0}{M_0};$$

d. h.: führt man die zusammengesetzte Operation  $\{ \}$  an  $E_0$ , bez. an  $M_0$  aus, so erhält man  $E_t$  bez.  $M_t$ , — wohlverstanden — mit einer Zweideutigkeit, die dem Umstande zuzuschreiben ist, dass der Operator  $D_\omega$ , nach (29), zwei verschiedene Bedeutungen hat; um die Wahl zwischen den möglichen Eventualitäten zu entscheiden, genügt also die Kenntnis von  $E_0$  (bez.  $M_0$ ) allein nicht, vielmehr muss man ausserdem noch ein Datum haben, z. B.  $M_0$  oder den Anfangswert der Ableitung  $E'$ , oder den Wert von  $E$  für einen anderen Zeitmoment, ausser demjenigen für  $t = 0$  etc., d. h. im ganzen zwei Data, in Uebereinstimmung mit dem Umstande, dass die Gleichung (1a) für  $E$  (und ähnlich die für  $M$ ), als Differentialgleichung aufgefasst, in Bezug auf die Zeit von der zweiten Ordnung ist. Hält man diese Bemerkung fest, so kann man sich auch der Form (32) der Lösungen bedienen.

Die Definition der Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$ ,  $\{\sin(\varphi)\}$  — wo  $\varphi$  in unserem Falle eine Abkürzung für  $-itD_\omega$  ist — ist schon oben gegeben worden; da nun diese definirt sind, können wir jetzt einen Schritt weiter machen und einen anderen aus ihnen zusammengesetzten Operator mittels der Definition

$$(33) \quad \{e^{\varphi}\} = \{\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\}$$

einführen, indem wir uns nämlich von der analogen Formel leiten lassen, welche für eine Exponentialfunction gilt, deren Exponent  $\varphi$  eine Quantität im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist. (Vgl. sämtliche analogen Bemerkungen, die oben bei Gelegenheit der Einführung der Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$  und  $\{\sin(\varphi)\}$  gemacht wurden.)

Wendet man nun diesen neuen Operator auf Gleichung (32) an und setzt also  $\varphi = -itD_\omega$ , so erhält man

$$(C) \quad E_t = \{e^{itD_\omega}\} E_0, \quad M_t = \{e^{itD_\omega}\} M_0;$$

eine jede dieser Formeln ist nun nichts anderes, als ein symbolischer Ausdruck des Taylor'schen (oder Mac-Laurin'schen) Satzes, insofern man nämlich symbolisch schreiben kann:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_t &= \psi_0 + \frac{t}{1!} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_0 + \frac{t^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_0 + \dots \\ &= \left\{ 1 + \frac{(tD)}{1!} + \frac{(tD)^2}{2!} + \dots \right\} \psi_0 = \{e^{tD}\} \psi_0; \end{aligned} \right.$$



wir wiederholen aber, dass ähnliche Ausdrücke nur dann einen gewissen Sinn haben, wenn der Operator (Derivator)  $D$  in *terminis* von anderen Operationen und zwar *solchen* („geometrischen“) bekannt ist, die sich *ausführen lassen, wenn nur die anfängliche Verteilung* ( $\psi_0$ ) der Quantität  $\psi$  selbst gegeben ist, d. h. wenn  $D$  den Charakter eines  $D_0$  bekommt (vgl. oben).

Umgekehrt könnte man aus dem symbolischen Ausdruck des Taylor'schen Satzes offenbar die früher gegebenen Formeln für  $E_i$ ,  $M_i$  ableiten; in der That, setzt man hierin für  $D$  den Operator  $D_0 = \mp i v \cdot \text{curl}$  [vgl. (29)], so erhält man  $E_i$  durch  $E_0$  und  $M_i$  durch  $M_0$  ausgedrückt, und zwar mit einer Zweideutigkeit des Vorzeichens bei den Gliedern  $\{\sin(\ )\}$ , die jedoch aufgehoben wird, sobald man die Beziehungen (31) einführt, wobei dann auch zugleich die Formeln (A), (B) sich ergeben, in denen  $E_i$ ,  $M_i$  — nunmehr ohne Zweideutigkeit — sowohl durch  $E_0$  wie auch — gleichzeitig — durch  $M_0$  ausgedrückt erscheinen.

Jener exponentielle Charakter der symbolischen Formeln, wie z. B. der oben betrachteten und mit Hülfe des Taylor'schen Satzes abgeleiteten, scheint mir von einer viel allgemeineren Natur als dieser Satz selbst und zwar dem Begriffe eines jeden Operators inherent zu sein, mit dessen Hülfe man zur Kenntnis der Vergangenheit und der Zukunft gelangt, wenn man die bezüglich Operationen daran ausführt, was sich auf den gegenwärtigen Sachverhalt bezieht.

Es sei  $\psi$  eine Function der Zeit und des Ortes, welche den Zustand der Dinge in jedem Augenblicke und in jedem Punkte eines gewissen Raumgebietes beschreibt oder definirt, und  $H$  sei ein Operator, mit dessen Hülfe man den Wert von  $\psi$  (für irgend einen dieser Punkte) für den Zeitpunkt  $t_2$  aus seinem Werte für den Zeitpunkt  $t_1$  erhält, d. h.:

$$(35) \quad \psi_{t_2} = H_{(t_2-t_1)} \psi_{t_1},$$

oder, indem man  $t_1$  als Anfang der Zeit betrachtet und den anderen in Rede stehenden Augenblick mit  $t$  ( $t \geq 0$ ) bezeichnet:

$$(36) \quad \psi_t = H_t \psi_0.$$



Dann wird der Operator  $H$  für die entsprechende Klasse von Erscheinungen charakteristisch sein. Nehmen wir nun an, dass er diese seine Eigenschaft für sämtliche Augenblicke der Zeit oder wenigstens für diejenigen, welche zu einer gewissen Epoche gehören, und für sämtliche Punkte des betrachteten Gebietes beibehält, so wird der Operator  $H$  auf Grund dieser seiner physikalischen Bedeutung die beiden folgenden Fundamenteigenschaften haben:

1. Führt man die Operation  $H$  an  $\psi_0$  und dann an dem auf diese Weise erhaltenen  $\psi_t$  die Operation  $H$  aus, so muss man auf den ursprünglichen Zustand der Dinge, d. h. auf  $\psi_0$  wieder zurückkommen, und man hat also:

$$\left\{ \begin{matrix} H \\ -t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ +t \end{matrix} \right\} \psi_0 = \psi_0,$$

was in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$(37) \quad \left\{ \begin{matrix} H \\ -t \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ +t \end{matrix} \right\}^{-1}.$$

2. Geht man von  $t = 0$  aus einmal unmittelbar zum Zeitmoment  $t$  über, das andere Mal aber von  $t = 0$  zu  $t = \tau_1$ , dann von  $t = \tau_1$  zu  $t = \tau_1 + \tau_2$  etc., und endlich von

$t = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}$  zu  $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n = t$  über, so muss man in den beiden Fällen zu ein und demselben Zustand, d. h. zu dem für den Zeitmoment  $t$  geltenden gelangen, und man hat folglich:

$$(38) \quad \left\{ \begin{matrix} H \\ (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ \tau_n \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} H \\ \tau_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ \tau_1 \end{matrix} \right\},$$

und im Besonderen, für  $n$  gleiche Zeitintervalle  $t$ :

$$(39) \quad \left\{ \begin{matrix} H \\ nt \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\}^n.$$

Dies sind nun aber eben die Eigenschaften der exponentiellen Functionen (mit einem zu  $t$  proportionalen Exponenten), und wiewohl es sich in unserem Falle (allgemein zu reden) nicht um eine Quantität, d. h. nicht um einen Multiplicator der Grösse  $\psi$ , sondern um eine beliebige Operation  $H$  handelt, die an  $\psi$  auszuführen ist und die Zeit  $t$  als eine Art Parameter enthält, so können wir dennoch, auf Grund der charak-

teristischen Eigenschaften (37) bis (39) dem Operator  $H$  die Exponentialform verleihen:

$$(40) \quad \left\{ \frac{H}{t} \right\} = \{e^{tF}\},$$

wo  $F$  ein anderer Operator ist, der in einer bestimmten Weise mit  $H$  zusammenhängt, der aber nun *nicht* mehr die Zeit enthält.

In dieser letzteren Aequivalenz haben wir nicht einen blossen rein formalen Ausdruck, sondern eine Form, welche eben die wesentlichste physikalische Eigenschaft und Bedeutung aller derjenigen Operatoren abspiegelt, die von der Gegenwart uns zur Kenntnis der Vergangenheit und der Zukunft führen.

Der Taylor'sche Satz kann, von diesem Gesichtspunkte aus, als ein sehr specieller Fall derjenigen Wahrheit betrachtet („betrachtet“ *nicht* etwa bewiesen) werden, die in Formel (40) enthalten ist, und in der That, wenn die Grösse  $\psi$ , an der man die bezüglichen Operationen auszuführen hat, sämtlichen Bedingungen, die für die Gültigkeit des Taylor'schen Satzes erfordert werden, Genüge leistet, erlangt der Operator  $F$  die Eigenschaft

$$(1 + \tau F) \psi_0 = \lim_{\tau=0} [\psi_\tau],$$

oder

$$F = \lim_{\tau=0} \left[ \frac{\psi_\tau - \psi_0}{\tau} \right],$$

und er wird also zu einem Derivator  $D$  (oder  $D_\omega$ , vgl. oben).

Analog können wir uns einen Operator  $K$  vorstellen, welcher an dem Werte  $\psi_0$  von  $\psi$  in einem beliebig gegebenen Punkte  $O$  ausgeführt (für welchen Punkt man  $\psi$  für alle Augenblicke kennt, die zu einem gewissen Zeitintervall gehören) uns den Wert von  $\psi$  für einen beliebigen anderen Punkt ( $P$ ) eines gewissen Raumgebietes liefert; drückt man diese Voraussetzung durch die Schreibweise

$$(41) \quad \psi_P = \left\{ \frac{K}{O, P} \right\} \psi_0$$

aus, so kann man aus dem physikalischen Sinne des Operators  $K$  seine, denen von  $H$  analoge Eigenschaften herleiten, und zwar:

$$(42) \quad \left\{ \frac{K}{O, P} \right\} = \left\{ \frac{K}{P, O} \right\}^{-1},$$

$$(43) \quad \left\{ \frac{K}{O, P} \right\} = \left\{ \frac{K}{O, P_1} \right\} \left\{ \frac{K}{P_1, P_2} \right\} \dots \left\{ \frac{K}{P_n, P} \right\},$$

wo  $P_1, P_2, \dots, P_n$  eine Gruppe beliebiger Punkte (die im Grenzfalle auch ein Continuum oder eine Linie werden kann) bedeuten, die zusammen mit den Punkten  $O$  und  $P$  in demselben Gültigkeitsgebiete der Eigenschaften von  $K$  situirt, sonst aber ganz willkürlich angeordnet sind.

Ist, im Besonderen, der Operator  $K$  unter der Form

$$(44) \quad \left\{ \frac{K}{OP} \right\} = \left\{ \frac{K}{R} \right\}$$

bekannt und gegeben, wo  $R$  den „Schritt“ oder den Vector  $\overline{OP}$  bedeutet, so können die obigen Eigenschaften [(42), (43)] dadurch ausgedrückt werden, dass man schreibt:

$$(45) \quad \left\{ \frac{K}{+R} \right\} = \left\{ \frac{K}{-R} \right\}^{-1}$$

und, wenn  $R$  die Resultante von  $n$  Vektoren  $R_1, R_2, \dots, R_n$  ist:

$$(46) \quad \left\{ \frac{K}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} \right\} = \left\{ \frac{K}{R_1} \right\} \left\{ \frac{K}{R_2} \right\} \dots \left\{ \frac{K}{R_n} \right\},$$

was im besonderen Falle von  $n$  der Richtung und Grösse nach untereinander gleichen Vektoren in

$$(47) \quad \left\{ \frac{K}{nR} \right\} = \left\{ \frac{K}{R} \right\}^n$$

übergeht; diese Aequivalenz, welche in erster Linie für ein ganzzahliges  $n$  gilt, kann (mit einem leichten Raisonnement) auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden, d. h. auf den Fall, wo  $n$  gleich einer beliebigen, jedoch scalaren Grösse ist. — Auch hier können wir also eine exponentielle Form aufstellen:

$$(48) \quad \left\{ \frac{K}{R} \right\} = \{e^{RG}\},$$

wo  $G$  ein anderer Operator ist, der dem  $K$  in einer gewissen Weise entspricht, der aber weder den Vector  $R$  noch auch irgend etwas anderes enthält, was sich auf die relative Lage der beiden Punkte  $O, P$  und die Kennzeichnung deren Differenz beziehen würde. — Führt man z. B. die drei Einheitsvectoren  $i, j, k$  (in üblicher Bezeichnung) und drei entsprechende Scalargrössen  $x, y, z$  (rechtwinklige Coordinaten), sodass  $R$  die Form

$$(49) \quad R = ix + jy + kz$$

annimmt, so kann man anstatt (48) schreiben:

$$(50) \quad \left\{ \frac{K}{R} \right\} = \{e^{x \cdot G_x}\} \{e^{y \cdot G_y}\} \{e^{z \cdot G_z}\},$$

wo  $G_x, G_y, G_z$  für  $iG, jG, kG$  gesetzt worden sind.

In einem ganz speciellen Falle, wenn nämlich die Grösse  $\psi$ , an welcher die betrachteten Operatoren auszuführen sind, den bekannten Bedingungen der Stetigkeit etc. Genüge leistet, erhalten die Operatoren  $G_x, G_y, G_z$  die Bedeutung *partieller Derivatoren* (der Function  $\psi$ ) in Bezug auf  $x, y, z$  und die obige Formel (50) geht in einen symbolischen Ausdruck des Taylor'schen Satzes für eine Function von drei Variablen über:

$$(51) \quad \psi_{x,y,z} = \{e^{x \cdot D_x}\} \{e^{y \cdot D_y}\} \{e^{z \cdot D_z}\} \psi_{0,0,0}.$$

Anstatt des Vectors  $R$  könnte man übrigens eine andere Grösse einführen, um — in dem Operator  $K$  — ein Correlativ für den Uebergang von einem Punkte des betrachteten Gebietes zu einem anderen Punkte zu haben.

Durch gleichzeitige Anwendung eines Operators von der Art  $H$  und eines Operators von der Art  $K$  (wenn nämlich zwei solche Operatoren für die Erscheinungen gelten, die sich in einem gewissen Raumgebiete innerhalb eines gewissen Zeitintervalls abspielen) kann man von dem Zustande  $\psi_{0,t_0}$ , der im Punkte  $O$  zur Zeit  $t_0$  (die wir z. B. als  $t = 0$  ansehen können) herrscht, zu dem Zustande  $\psi_{P,t}$  übergehen, den man in einem anderen Punkte  $P$  und zu einer anderen (früheren oder späteren) Zeit  $t$  finden würde. Man erhält nämlich zuerst

$$(52) \quad \psi_{0,t} = \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} \psi_{0,t_0} = \{e^{tF}\} \psi_{0,t_0}$$

und dann

$$(53) \quad \psi_{P,t} = \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} \psi_{0,t} = \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} \psi_{0,t_0} = \{e^{RG}\} \{e^{tF}\} \psi_{0,t_0},$$

oder auch zuerst  $\psi_{P,t_0}$  aus  $\psi_{0,t_0}$  und dann  $\psi_{P,t}$  aus  $\psi_{P,t_0}$ ; sollen die beiden Resultate identisch sein, so muss sich die Reihenfolge der auszuführenden Operationen ändern lassen, ohne eine Aenderung des Endresultates herbeizuführen, d. h. es muss sein:

$$(54) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\}.$$

Benutzt man für die beiden Operatoren die Formen (40), (48), so kann man die symbolischen Exponentialausdrücke nach der analogen für gewöhnliche Exponentialfunctionen geltenden Regel zusammenziehen und also (53) schreiben:

$$(54') \quad \psi_{P,t} = \{e^{R \cdot G + t \cdot F}\} \psi_{0,t_0}.$$

Diese Form eignet sich direct zur Auffassung der sogenannten „Fortpflanzung“ von Zuständen. Wenn nämlich im Punkte  $P$  zur Zeit  $t$  derselbe Zustand herrscht, der in einem anderen Punkte  $O$  zu einer früheren Zeit  $t_0$  (z. B.  $t_0 = 0$ ) herrschte, so sagt man, dass der Zustand sich von  $O$  bis  $P$  in der Zeit  $t$  „fortgepflanzt“ hat; im allgemeinen kann man dabei die Frage nach dem *Wege* der Fortpflanzung ganz unberührt lassen. Das Obige können wir ausdrücken, indem wir schreiben:

$$\psi_{P,t} = \psi_{O,t_0},$$

oder:

$$(55) \quad \{e^{R \cdot G + t \cdot F}\} = 1,$$

oder auch (was aber ebenfalls bloss als symbolische Aequivalenz angesehen werden muss)

$$(56) \quad R G + t F = 0,$$

wo  $R$  einen ganz bestimmten Vector und  $t$  eine ganz bestimmte Zeitdauer bedeutet, die miteinander in der oben angenommenen Beziehung stehen.

Wenn sich der Zustand von  $O$  nach  $P$  auch wirklich nach der Länge des Vectors  $R = OP$  fortpflanzt, so folgt dann aus (56), dass das Symbol

$$(57) \quad \{v\} = - \left\{ \frac{F}{G} \right\} = - \{F\} \{G\}^{-1}$$

demjenigen entspricht, was man gewöhnlich *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* zu nennen pflegt. Es ist aber klar, dass dies nur dann auch eine wirkliche *Geschwindigkeit* der Fortpflanzung von Zuständen sein wird, wenn der symbolische Operator  $\{F/G\}$ , indem er an der die betreffenden Zustände definirenden Grösse  $\psi$  ausgeführt wird, sich so verhält, als wäre er ein einfacher Multiplicator dieser Grösse selbst. Ist dies aber nicht der Fall, so kann man höchstens von einer Fortpflanzung mit gleichzeitiger Deformation (wie es z. B. die Dämpfung der Wellen ist), nicht aber von einer *reinen* Fortpflanzung der unversehrten Zustände sprechen.

Die Anwendung der Formel (48) für den Operator  $K$  (analog der Gleichung (40) für  $H$ ) und der Formel (54) für die Combination dieser beiden Operatoren auf die Lösungen

vieler specieller Probleme ist so naheliegend und die Durchführung der betreffenden Lösungsmethode so einfach, dass ich es für überflüssig halte, mich hierüber an dieser Stelle zu verbreiten; und was die Anwendung der Formel (40) (für  $H$ ) anbelangt, will ich mich (ausser dem oben behandelten Falle eines vollkommen isolirenden Mediums) auf die Andeutung beschränken, dass man für einen Halbleiter, von der Leitfähigkeit  $\lambda$ , anstatt der Gleichung (Ia) eine etwas complicirtere Beziehung, und zwar (wie wohl bekannt):

$$\mu A^2 \{ K D^2 + \lambda D \} E = - \text{curl}^2 E,$$

oder die Aequivalenz

$$(58) \quad D^2 + \frac{1}{\mathfrak{D}} D = - v^2 \cdot \text{curl}^2$$

hat, wo  $\mathfrak{D}$  die sogenannte „Relaxationszeit“ ( $\mathfrak{D} = K/\lambda$ ) ist, eine neben der Geschwindigkeit  $v$ , für die gegebene Substanz charakteristische Grösse; man hat also in diesem Falle für den Operator  $D$ , welcher in  $E_t = \{e^{tD}\} E_0$  vorkommt, den symbolischen Ausdruck:

$$(59) \quad D = - \frac{1}{2\mathfrak{D}} \pm \sqrt{\frac{1}{4\mathfrak{D}^2} - v^2 \cdot \text{curl}^2},$$

sodass die betreffende Formel für  $E_t$  die Gestalt bekommt:

$$(60) \quad \begin{cases} E_t = e^{-\frac{t}{2\mathfrak{D}}} \cdot \left\{ e^{\pm i t \sqrt{v^2 \cdot \text{curl}^2 - \frac{1}{4\mathfrak{D}^2}}} \right\} E_0 \\ = e^{-\frac{t}{2\mathfrak{D}}} \cdot [\{\cos(t\sqrt{\phantom{x}})\} E_0 \pm i \{\sin(t\sqrt{\phantom{x}})\} E_0]; \end{cases}$$

um über die Wahl des Vorzeichens zu entscheiden, muss man ausser  $E_0$  noch etwas, z. B.  $M_0$  oder  $E_0'$ , etc., kennen; in einem ganz speciellen Falle, in welchem nämlich die anfängliche Verteilung der Kräfte eine solche ist, dass der Operator  $\text{curl}$  einem Multiplikator der Kräfte, mit welchen man operirt, äquivalent wird, drückt die Formel (60) gedämpfte elektromagnetische Wellen oder Schwingungen aus, die nämlich um so schneller gedämpft werden, je kürzer die Relaxationszeit  $\mathfrak{D}$  ist.

Man erhält einen noch allgemeineren Fall, als ihn das Problem der Halbleiter bietet, wenn man annimmt, dass der

Operator  $\mathfrak{D}$  durch eine symbolische Gleichung von einem beliebigen Grade  $n$  gegeben ist:

$$(61) \quad a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_2 D^2 + a_1 D = F',$$

wo  $F'$  ein „geometrischer“ Operator ist, wie z. B.  $\text{curl}$  oder  $\text{curl}^2$  etc., und wo die Coefficienten  $a$  entweder Constanten oder Functionen des Ortes sind.

Man könnte sich übrigens noch viel allgemeinere und complicirtere Fälle vorstellen, als es der letztere ist, nämlich solche, in welchen man zwischen dem Operator  $D$  und einem „geometrischen“ Operator, wie der oben mit  $F'$  bezeichnete, irgend eine Beziehung gegeben hat.

Die Operatoren  $\{H\}$  und  $\{K\}$ , deren Definition in (36) und (41) gegeben ist, erschöpfen natürlich den allgemeinen Begriff eines „Operators“ nicht, und man könnte sich leicht andere Operatoren vorstellen, die sich der fundamentalen Eigenschaften [(37) und (38) bez. (42) und (43)] von  $\{H\}$  und  $\{K\}$ , deren physikalische Bedeutung durch die Exponentialform ausgedrückt ist, nicht erfreuen. Für das Studium der Naturerscheinungen scheinen mir aber von fundamentaler Wichtigkeit eben diese beiden Klassen von Operatoren ( $H, K$ ) zu sein, die ich „physikalische Operatoren“ zu nennen vorschlagen möchte, indem ich mir in ihrer Definition ihre oben entwickelten Eigenschaften bereits involvirt denke. Eine jede Klasse von natürlichen Erscheinungen, oder wenigstens von solchen, die überhaupt eine quantitative Behandlung zulassen, würde hiernach durch die bezüglichlichen physikalischen Operatoren charakterisirt sein und das wissenschaftliche Studium der Naturerscheinungen würde in ausgedehnten Untersuchungen über die Eigenschaften dieser Operatoren bestehen, in Untersuchungen, welche auf Beobachtung basiren und vom Experiment genährt werden.

Bologna, Juni 1901.

(Eingegangen 30. Juli 1901.)



**12. Ueber den photoelektrischen  
Effect in der Nähe des Funkenpotentials;  
von H. Kreusler.**

(Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation.)

Die 1887 von Hertz<sup>1)</sup> entdeckte Wirkung des ultravioletten Lichtes auf Funkenentladungen beruhen, wie Warburg<sup>2)</sup> gezeigt hat, auf der Herabminderung der sogenannten Verzögerungsperiode durch Strahlen kurzer Wellenlänge, die auf die Kathode der Funkenstrecke treffen. Die Wirkung ist unabhängig von der Substanz der Elektroden; nur beim Eisen vermutet Hertz eine etwas grössere Empfindlichkeit gegenüber anderen Metallen.

In gewissem Gegensatze hierzu steht das von Hallwachs<sup>3)</sup> beobachtete Phänomen der lichtelektrischen Zerstreuung, wonach negativ elektrisirte Leiter im ultravioletten Licht ihre Ladung allmählich verlieren. Der Hallwachs'sche Effect weist im Gegensatz zum Hertz'schen bedeutende, durch das Material des geladenen Leiters bedingte Unterschiede auf. So reagiren die Alkalimetalle<sup>4)</sup> bereits auf diffuses Tageslicht, sowie auf das Licht einer Kerze. Bei den meisten Schwermetallen bedarf es sehr intensiver Lichtquellen (Flammenbogen, Flaschenfunken), um überhaupt eine merkliche Zerstreuung der Elektrizität hervorzubringen. Das Eisen zeichnet sich bei dem Hallwachs'schen Effect im Gegensatz zu der Beobachtung von Hertz durch besondere Unempfindlichkeit aus. Im grossen und ganzen scheint die lichtelektrische Empfindlichkeit mit dem anodischen Charakter der Metalle

1) H. Hertz, Wied. Ann. **31**. p. 983. 1887.

2) E. Warburg, Wied. Ann. **62**. p. 385. 1897.

3) W. Hallwachs, Wied. Ann. **33**. p. 301. 1888.

4) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **43**. p. 225. 1891.



zuzunehmen. Ferner liegt im allgemeinen das Maximum der Empfindlichkeit bei um so grösseren Wellenlängen des erregenden Lichtes, je anodischer das betreffende Metall ist. Für Rb<sup>1)</sup> liegt z. B. das Empfindlichkeitsmaximum im Gelb, für K im Blau.

Fast alle Schwermetalle reagiren nur auf ultraviolette Strahlen und zwar zumeist auf solche von hoher Brechbarkeit.

Nimmt man nun an, dass der Hertz'sche wie der Hallwachs'sche Effect auf derselben Wirkung des Lichtes, d. h. auf der Auslösung eines elektrischen Stromes beruhen, so liegt die Vermutung nahe, dass die bei niederen Potentialen wenig empfindlichen Metalle bei möglichster Annäherung an das Funkenpotential eine intensive Wirkung zeigen, weil in diesem Falle die Bedingungen denen des Hertz'schen Effectes gleichkommen.

Die vorliegende Untersuchung liefert hierzu die Bestätigung, wie aus einem Vergleich der Wirkung an zwei unter den gewöhnlichen Umständen sehr ungleich empfindlichen Metallen, Eisen und Kupfer, hervorgeht.

Ist  $V_0 = 4060$  Volt das Funkenpotential und  $V$  das Kathodenpotential bei der Messung der Intensität des lichtelektrischen Stromes, so beträgt für  $V_0 - V = 560$  die Empfindlichkeit des Cu ungefähr das 30fache der des Fe. Ist aber  $V_0 - V = 30$ , so ist Cu nur noch dreimal empfindlicher als Fe. Ueberhaupt zeigen in grosser Nähe des Funkenpotentials alle Metalle eine derartige lichtelektrische Empfindlichkeit, dass dagegen die bei niederen Potentialen beobachteten Wirkungen vollständig in den Hintergrund treten.

Für die Vorversuche dienten kugelförmige Elektroden aus Zn bez. Fe. Da sich herausstellte, dass die Intensität des photoelektrischen Stromes in hohem Grade abhängt von der Richtung des Lichtstrahles gegen die gemeinschaftliche Axe der Kugeln, wurde von diesen Abstand genommen, und als Kathoden wurden kleine, aus Blech gestanzte Calotten von 9 mm Krümmungsradius und 12 mm freier Oeffnung verwandt. Die Anode bildete ein 0,25 mm dicker Platindraht, der quer über das eine Ende einer kurzen, 20 mm weiten Messingröhre gespannt war.

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 52. p. 433. 1894.

Die Kathoden  $K$  (Fig. 1) passten in eine gemeinsame Fassung und wurden mit dieser auf einem Funkenmikrometer  $M$  befestigt. Der Kathode gegenüber befand sich in etwa 1 mm Abstand die Anode  $A$  ebenfalls auf dem Mikrometer. Die Kathode war fest und die Anode durch die Mikrometerschraube beweglich.

Das Licht ging convergent durch das Messingrohr der Anode hindurch und fiel senkrecht auf die Kathode auf. Dadurch war die Empfindlichkeit der Anordnung ungemein gesteigert, und kleine Orientierungsfehler zu den Lichtstrahlen waren ganz ohne Belang.

Die Anode hatte durch zwei miteinander vertauschbare Widerstände I und II Verbindung mit der Erde.

Die Widerstände bestanden aus 150 cm langen, 4 mm weiten, zickzackförmig gebogenen Glasröhren, die an den Enden reagenzglas-ähnliche Gefässe für die 20 cm<sup>3</sup> messenden Elek-

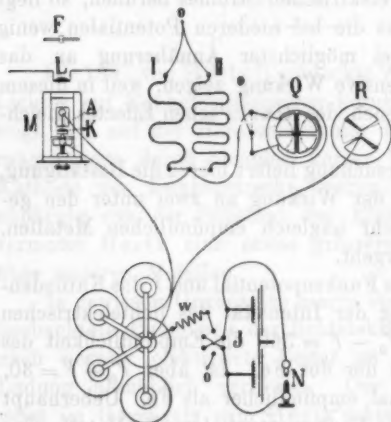


Fig. 1.

troden aus Cadmiumblech trugen. Die Röhren waren mit einer Lösung von vorher geschmolzenem Cadmiumjodid in xylolhaltigem Amylalkohol (Sp. = 132°) gefüllt. Die  $\text{CdJ}_2$ -Lösung allein mit Amylalkohol zu verdünnen, ging nicht an, da dieser auch im sogenannten chemisch reinen Zustand ein für vorliegenden Zweck viel zu grosses Leitvermögen besitzt. Zu bemerken ist, dass schon ein relativ geringer Zusatz von Xylol hinreicht, um den Widerstand der  $\text{CdJ}_2$ -Lösung beträchtlich zu erhöhen. Es scheint sich hier demnach weniger um eine blosse mechanische Verdünnung, als um eine Herabsetzung des Dissoziationsgrades der Lösung zu handeln. Widerstand I betrug  $3556 \cdot 10^6$  und Widerstand II  $1743 \cdot 10^7$  Ohm. Die geeignete Grössenordnung der Widerstände wurde empirisch

gefunden. Eine Polarisation an den Elektroden war nicht nachweisbar.

#### Kathodenpotential.

Die Kathode erhielt ihre Ladung von einer constant laufenden Influenzmaschine *J*. Der Anforderung, wenigstens für die Dauer einer Messung eine ganz constante Potentialdifferenz zu haben, wurde in folgender Weise genügt.

Die Kathode war mit einer grossen Capacität, einer Batterie von fünf Leydener Flaschen zu je  $2170 \text{ cm}^2$  Ausseubelegung, verbunden. Die Zuleitung zu dieser Batterie von der Maschine vermittelte ein  $\text{CdJ}_2$ -Amylalkoholwiderstand *w* von solcher Grösse, wie wegen des Hallwachseffectes an der Kathode zulässig war. Der Hallwachseffect ist nämlich in der Nähe des Funkenpotentials so bedeutend, dass er, wenn *w* zu gross ist, eine teilweise Entladung der Flaschenbatterie herbeiführt, sodass ihr Potential dadurch herabsinkt.

Auf beliebiger Höhe konnte das Kathodenpotential erhalten werden durch zwei die Spitzen einander zukehrenden Bündel feiner Nadeln im Nebenschluss der Elektrisirmaschine. Die Entfernung der Spitzen liess sich durch eine Schraube variiren.

#### Lichtquelle.

Das zur Auslösung des photoelektrischen Stromes erforderliche Licht lieferten 2 mm lange Condensatorfunken zwischen Aluminiuelektroden. Diese waren zur Verhütung des störenden Umherflackerns der Funken nur 0,4 mm dick. Da nicht allein an ein und demselben Metall der photoelektrische Effect verfolgt, sondern auch eine Anzahl verschiedener Metalle unter sich verglichen werden sollten, musste die Intensität des Funkenlichtes während einer langen Zeitdauer durchaus constant sein. In erster Linie musste daher eine durch Zerstäuben der Elektroden verursachte Aenderung der Funkenlänge vermieden werden.

Folgender Apparat (Fig. 2) ermöglichte dies in vollkommen befriedigender Weise.

Die beiden Elektroden *E* stehen angenähert unter rechtem Winkel zu einander und stossen mit den Enden auf eine schwach abwärts geneigte Glasplatte *p*, möglichst dicht an

ihrem vorderen Rande. Ihre unverrückbare Lage erhalten sie durch zwei eigentümlich gekrümmte Glasstäbchen *s* (vgl. Figur). Eine Drehung oder Verschiebung der Elektrodenhalter *h* in

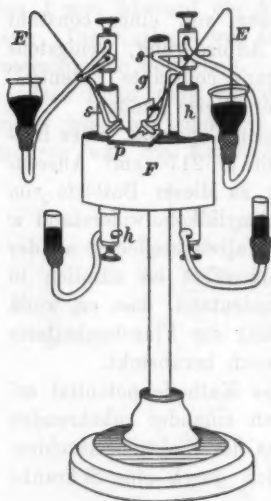


Fig. 2.

der Fassung *F* gestattet die Länge der Funken zu ändern. *g* ist eine Glimmerplatte, die senkrecht zu der Glasplatte, von dieser etwa 1 mm entfernt, zwischen den Elektroden befestigt ist. Sie verhindert das Ueberspringen von Funken oberhalb der eigentlichen Entladungsstrecke. Die oberen Enden der Drähte sind abwärts gebogen und tauchen in Quecksilbergefäße ein, durch die auch die elektrische Zuleitung erfolgt.

Zum Betriebe des die Funken liefernden Inductionsapparates (Spulenlänge 21 cm, Stromstärke 4 Amp.) diente ein doppelt wirkender Quecksilberunterbrecher von Siemens & Halske. Die Unterbrechungszahl ergab sich zu 29 pro sec.

Von den Belichtungsfunken *F* (Fig. 1) wurde mit einer Quarzlinse *L* auf der Kathode ein reelles Bild entworfen, das nur in der Mitte durch den schmalen Schatten der Anode unterbrochen war.

#### Ermittlung des Funkenpotentials.

Die sorgfältig gereinigte und polierte Kathode wurde in 1 mm Abstand von der Anode auf dem Funkenmikrometer befestigt. Diese Einstellung liess sich aus gewissen Gründen nicht sehr präzise ausführen, weshalb die Funkenpotentiale bis etwa 30 Volt auseinander liegen.

Nun erhielt die Kathode eine langsam wachsende negative Ladung, bis gegen die jetzt direct zur Erde geleitete Anode bei gleichzeitiger Bestrahlung Funkenentladung eintrat. Die Bestrahlung, die den Zweck hatte, die „Verzögerung“ zu beseitigen, geschah mit möglichst schwachem und kurz andauerndem Funkenlicht (Inductorium ohne Flasche) wegen der

durch das Licht verursachten „Ermüdung“ der Kathode, wovon später eingehender die Rede sein wird. Die fünf Leydener Flaschen waren dabei ausgeschaltet, um nicht die polirte Kathodenfläche durch starke Funken zu corrodiren. Nach Schluss eines Versuches, wenn die Kathode nicht mehr gebraucht wurde, fand zur Controle noch eine Bestimmung des Funkenpotentials unter Einschaltung der Batterie statt.

#### Elektrometer.

Die Messung des Kathodenpotentials geschah an einem Righi'schen Reflexionselektrometer *R* (Fig. 1) mit Scala und Fernrohr. (Scalenabstand gleich 3,20 m.)

Zur Bestimmung der Intensität des photoelektrischen Stromes war ein Quadrantenpaar (1) eines Thomson'schen Elektrometers *Q* mit der Anode verbunden. Diese hatte, wie bereits erwähnt, durch einen der Widerstände I und II Erdverbindung. Das zweite Quadrantenpaar (2) ging direct zur Erde. Der bei Belichtung von der Kathode zur Anode gehende photoelektrische Strom erzeugte an den Enden der Widerstände eine Potentialdifferenz, deren Betrag das Elektrometer *Q* anzeigte.

Waren am Widerstand I die Potentialdifferenzen für die Messung zu klein, so wurde er mittels Quecksilberwippe gegen II ausgewechselt.

Die Empfindlichkeit des Quadrantelektrometers betrug 1 Volt gleich 80 Sct. zu 2 mm (Scalenabstand gleich 2 m). Eine Hülfsladung der Elektrometernadel von 500 Volt genügte, da die gemessenen Potentialdifferenzen nicht über 3 Volt hinausgehen.

#### Beobachtung.

Die Kathode erhielt eine so hohe Ladung, als ohne Gefahr einer Funkenentladung möglich war (bis ca. 10 Volt unterhalb des Funkenpotentials), während die Anode directen Erdschluss hatte. Darauf wurde bestrahlt, die directe Erdleitung der Anode unterbrochen und der Ausschlag der Elektrometernadel notirt. Jede folgende Ablesung geschah bei einem niedrigeren Kathodenpotential als die vorhergehende.

Das durch den lichtelektrischen Strom der Anode erteilte Potential betrug höchstens 3 Volt, was, da die Gesamtspannung stets mehrere 1000 Volt betrug, keine Berücksichtigung fand.

## Kathodenermüdung.

Eine die Beobachtungen beeinträchtigende Rolle spielte das schnelle Nachlassen der lichtelektrischen Empfindlichkeit durch längere Belichtung bei den meisten Metallen. Diese „Ermüdung“ beruht auf einer Wirkung des ultravioletten Lichtes auf die Kathodenoberfläche, wie sich aus folgendem Versuch ergibt:

An einer Kathode von frisch polirtem Zn, welches die Ermüdungserscheinung in besonders hohem Maasse zeigt, wurde der lichtelektrische Strom bei einer Spannung von 3320 Volt mehrmals hintereinander gemessen. Zwischen je zwei Messungen blieb die Kathode mit der Erde verbunden, also auf dem Potential Null. In dieser Zwischenzeit nun wurde sie entweder einige Minuten lang bestrahlt, oder vor Licht geschützt.

Das Resultat veranschaulicht folgende Tabelle:

## Intensität des photoelektrischen Stromes:

zu Anfang . . . . .	$1,36 \cdot 10^{-10}$ Amp.
nach 8 Min. ohne Belichtung	$1,33 \cdot 10^{-10}$
nach 5 Min. Belichtung	$1,16 \cdot 10^{-10}$
nach 6 Min. ohne Belichtung	$1,16 \cdot 10^{-10}$
nach 5 Min. Belichtung	$1,02 \cdot 10^{-10}$
nach 5 Min. ohne Belichtung	$1,02 \cdot 10^{-10}$
nach 6 Min. Belichtung	$0,85 \cdot 10^{-10}$

Die Tabelle zeigt zugleich, dass die Ermüdung wenigstens für die hier in Betracht kommende Belichtungsdauer dieser proportional ist.

Dass thatsächlich eine Oberflächenänderung stattfindet, geht daraus hervor, dass nach längerer Bestrahlung sich die durch die Anode beschattete Stelle der Kathode beim Anhauchen als scharfe Linie markirte. Bei einer späteren Gelegenheit trat diese Oberflächenänderung noch viel prägnanter hervor. Eine Silberkathode befand sich hinter einem Spectrometerspalt, durch welchen auf sie ultraviolettes Licht von ungefähr  $200 \mu\mu$  Wellenlänge auffiel. Nachdem die Kathode mehrere Tage hindurch ohne Erneuerung der Politur gebraucht war, hatte ihre Oberfläche ein nebliges Aussehen, was wohl auf angezogene feste Teilchen aus der Luft zurückzuführen ist. Die streifenförmige Stelle, wo das Licht hingelangen konnte, war vollständig blank geblieben.

Bisweilen schien die Empfindlichkeit einer „ermüdeten“ Kathode nach einiger Zeit wieder zuzunehmen.

Gleiche Beobachtungen sind später von H. Buisson<sup>1)</sup> gemacht und eingehender verfolgt worden.

Das einzige Metall, dessen Empfindlichkeit während der Dauer einer Beobachtungsreihe wesentlich constant blieb, war reines Silber. Die Versuchsergebnisse<sup>2)</sup> sind im Folgenden tabellarisch zusammengestellt. Es bedeutet  $V$  das Kathodenpotential,  $V_0$  das Funkenpotential in Volt und  $J$  die Intensität des photoelektrischen Stromes in Ampère. Untersucht wurden Zn, Fe, Cu, Ag, Pt, Al, amalgamirtes Cu und berussertes Al.

Um die Resultate von dem Einfluss der Ermüdung zu befreien, bot sich folgender Weg. Jede Beobachtungsreihe setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Der erste giebt die Intensitäten des photoelektrischen Stromes beim Uebergang von hohen zu niederen Potentialen, der zweite in umgekehrter Reihenfolge. Trägt man die gefundenen Werte graphisch auf, indem man als Abscissen die Kathodenpotentiale und als Ordinaten die Stromintensitäten wählt, so ergeben sich zwei Curven, die am unteren Ende zusammenstossen. Die hieraus construirte Mittelcurve stellt den Verlauf für eine constante, mittlere Empfindlichkeit dar. Ist  $a$  die Maximalordinate der absteigenden Curve und  $b$  die entsprechende Ordinate der Mittelcurve, so ergibt das Verhältniss  $a/b$  das Maass der Er-

1) H. Buisson, Compt. rend. 20. p. 1298. 1900.

2) Nachdem vorliegende Untersuchungen bereits abgeschlossen und im Auszug der Physikalischen Gesellschaft vorgelegt waren, erschien in den Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 106. p. 273. 1899 (vgl. auch Beibl. 23. p. 585. 1899) eine Abhandlung des Hrn. E. v. Schweidler über den gleichen Gegenstand. Mit einer anderen Versuchsanordnung kommt Verf. im Princip zum gleichen Resultat wie der Verf. vorliegender Arbeit. Hr. v. Schweidler giebt aber an, störende, ruckweise Entladungen erhalten zu haben und hält den lichtelektrischen Entladungsvorgang bei Annäherung an das Funkenpotential für nicht stationär. Aus seinen Erfahrungen zieht Verf. den Schluss, dass ähnliche, offenbar durch Büschelentladungen verursachte Störungen bei meiner Anordnung in erhöhtem Maasse eintreten müssten. Dies ist indessen nicht der Fall, da bei mir die Entladungspotentiale absichtlich unterhalb der für Büschelentladungen notwendigen Grenze gewählt wurden. Mitunter kamen allerdings auch bei mir ruckweise Entladungen vor, die indessen stets durch ein von der Kathode angezogenes Staubfäserchen verursacht wurden. Im übrigen verlief die Entladung vollkommen stetig.



müdung an, womit die Ordinaten der Mittelcurve zu multipliciren sind, um die Werte der Anfangsempfindlichkeit für den ganzen Verlauf zu erhalten. Allerdings setzt dies Verfahren voraus, dass die zur Bestimmung von  $a/b$  zugehörigen Abscissen sehr genau gemessen sind, da wegen des ausserordentlich steilen Verlaufes der Curven nahe am Funkenpotential kleine Differenzen der Abscissen grosse Unterschiede der entsprechenden Ordinaten bedingen. Nun war eine genauere Ablesung des Righi'schen Elektrometers als auf etwa 0,3 Proc. nicht zu erreichen, weshalb sich der Factor  $a/b$  nur annähernd ermitteln liess.

Die erste Columne der Tabelle enthält Kathodenpotential und Stromintensität in absteigender, die zweite in aufsteigender Reihe. In der dritten Columne finden sich die auf die Anfangsempfindlichkeit bezogenen Intensitäten.

## Zink.

$$V_0 = 4060. \quad \frac{a}{b} = 1,258.$$

V	J	V	J	V	J
4040	136,39. $10^{-10}$ Amp.	1760	0,06. $10^{-10}$ Amp.	4040	136,39. $10^{-10}$ Amp.
3970	25,67	2590	0,08	3970	29,40
3780	5,88	3060	0,17	3770	6,14
3700	2,40	3330	0,36	3705	2,75
3590	1,39	3440	0,58	3615	1,74
3440	0,70	3640	1,36	3440	0,80
3300	0,40	3710	1,98	3315	0,47
3050	0,19	3760	3,88	3055	0,23
2540	0,09	3970	21,09	2535	0,11
1760	0,06	4040	80,51	1760	0,08
1170	0,05			1170	0,06

## Eisen.

$$V_0 = 4070. \quad \frac{a}{b} = 1,146.$$

V	J	V	J	V	J
4030	31,64. $10^{-10}$ Amp.	3080	0,04. $10^{-10}$ Amp.	4030	31,64. $10^{-10}$ Amp.
3970	6,33	3540	0,18	3980	8,06
3900	1,94	3630	0,31	3915	2,36
3790	0,85	3800	0,90	3795	1,23
3650	0,37	3930	2,18	3640	0,39
3580	0,17	3990	7,73	3585	0,20
3080	0,04	4030	23,57	3080	0,05
2310	0,01			2310	0,01



## Kupfer.

$$V_0 = 4050. \quad \frac{a}{b} = 1,138.$$

V	J	V	J	V	J
4080	92,81. $10^{-10}$ Amp.	1920	0,17. $10^{-10}$ Amp.	4030	92,81. $10^{-10}$ Amp.
3960	32,51	2680	0,27	3975	35,70
3820	11,25	3080	0,43	3820	12,00
3690	5,09	3300	[0,77]	3695	6,17
3600	2,05	3480	1,27	3600	2,28
3470	1,27	3600	1,95	3475	1,45
3280	0,84	3700	4,75	3290	[0,92]
3070	0,44	3820	9,84	3075	0,49
2680	0,27	3990	30,23	2680	0,31
1950	0,17	4030	70,31	1935	0,19
1200	0,11			1200	0,12

Silber.<sup>1)</sup>

$$V_0 = 4040. \quad \frac{a}{b} = 1.$$

V	J	V	J
4020	129,02. $10^{-10}$ Amp.	3290	0,42. $10^{-10}$ Amp.
3990	53,09	3060	0,22
3950	22,86	2890	0,17
3880	10,55	2470	0,10
3750	3,88	2140	0,08
3640	1,84	1630	0,06
3430	0,75	1170	0,05

## Platin.

$$V_0 = 4060. \quad \frac{a}{b} = 1,118.$$

V	J	V	J	V	J
4080	98,09. $10^{-10}$ Amp.	1580	0,06. $10^{-10}$ Amp.	4035	98,09. $10^{-10}$ Amp.
3960	27,78	2240	0,09	3970	29,29
3850	10,91	2850	0,14	3860	11,80
3720	4,22	3230	0,34	3710	3,93
3640	1,84	3350	0,48	3635	1,92
3570	1,35	3590	1,38	3580	1,58
3350	0,57	3680	1,60	3350	0,59
3180	0,32	3700	2,81	3205	0,37
2840	0,15	3870	10,21	2845	0,16
2180	0,09	3980	24,61	2210	0,10
1570	0,06	4040	77,33	1575	0,07
1120	0,05			1120	0,06

1) Bei Silber und beruhtem Aluminium wurde keine Ermüdung wahrgenommen.

## Aluminium.

$$V_0 = 4050. \quad \frac{a}{b} = 1,084.$$

V	J	V	J	V	J
4040	100,53. $10^{-10}$ Amp.	2000	0,04. $10^{-10}$ Amp.	4040	100,53. $10^{-10}$ Amp.
3930	10,55	2760	0,07	3930	11,05
3870	6,33	3310	0,22	3875	6,45
3780	2,32	3490	0,47	3780	2,35
3690	1,26	3680	1,23	3685	1,35
3470	0,44	3780	2,01	3480	0,49
3290	0,21	3880	6,33	3300	0,23
2770	0,08	3930	9,84	2765	0,08
2000	0,04	4040	85,07	2000	0,04
1120	0,03			1120	0,03

## Amalgamirtes Kupfer.

$$V_0 = 4060. \quad \frac{a}{b} = 1,033.$$

V	J	V	J	V	J
4020	66,45. $10^{-10}$ Amp.	900	0,12. $10^{-10}$ Amp.	4020	66,45. $10^{-10}$ Amp.
3930	56,24	1170	0,15	3980	48,64
3940	40,44	1720	0,18	3935	35,96
3850	21,09	2220	0,22	3840	18,51
3680	8,10	2560	0,28	3695	7,81
3570	4,58	2760	0,34	3580	4,37
3520	2,60	2890	0,40	3505	2,35
3360	1,55	3180	0,80	3375	1,53
3280	1,30	3270	1,02	3275	1,20
3130	0,88	3390	1,41	3155	0,87
2900	0,54	3490	1,95	2895	0,49
2770	0,42	3590	3,88	2765	0,39
2550	0,32	3710	7,03	2555	0,31
2140	0,25	3830	14,76	2180	0,24
1780	0,19	3930	29,19	1725	0,19
1240	0,17	3980	37,96	1205	0,17
950	0,14	4020	62,23	925	0,13
400	0,08			400	0,08

$$\text{Berussstes Aluminium.} \quad V_0 = 4050. \quad \frac{a}{b} = 1.$$

V	J	V	J
4040	94,57. $10^{-10}$ Amp.	3590	1,81. $10^{-10}$ Amp.
4020	53,09	3480	0,75
3940	20,75	3270	0,33
3880	12,23	2920	0,13
3820	7,40	2230	0,09
3730	2,38	1350	0,04
3680	1,91		

In Fig. 3 sind, um die Uebersicht nicht zu beeinträchtigen, nur die Curven für Fe, Al, Zn, Cu und amalgamirtes Cu gezeichnet. Aus dem gleichen Grunde ist auch nur ihr unterer Verlauf angegeben. Fig. 4 stellt indessen den Stromverlauf für Zn in fast seiner ganzen Ausdehnung dar und zwar in  $\frac{1}{20}$  des bei den übrigen Curven angewandten Maassstabes. Als Abscissen sind hier nicht die Kathodenpotentiale selbst, sondern ihre Differenzen vom Funkenpotential aufgetragen, da eben diese für den Stromverlauf maassgebend sind. Im anderen Falle würde, da die Funkenpotentiale etwas auseinander liegen, die Vergleichbarkeit der Curven gestört.

Man erkennt, dass die Intensität des photoelektrischen Stromes dem Kathodenpotential anfangs annähernd proportional ist und langsam mit diesem wächst. Bei einer gewissen Annäherung an das Funkenpotential beginnt die Stromstärke rascher zuzunehmen und gelangt schliesslich zu enorm hohen Werten (vgl. Fig. 4). Der Verlauf der Curven wird fast senkrecht.

Die Thatsache nun, dass in grosser Nähe des Funkenpotentials alle Metalle eine ausserordentlich grosse lichtelektrische Empfindlichkeit besitzen, liefert die Erklärung dafür, dass der von Hertz beobachtete Effect nicht von der Substanz der Funkenelektroden abhängt, oder dass eine derartige Abhängigkeit so minimal ist, dass sie sich der Wahrnehmung entzog.



Fig. 3.



Fig. 4.

Abweichend von früheren<sup>1)</sup> Beobachtungen zeichnet sich das Kupfer durch besonders hohe Empfindlichkeit aus. Zur Feststellung, ob vielleicht Spuren von Quecksilber an die Kathode geraten wären (amalgamirte Metalle sind viel empfindlicher als reine), wurde sie mehrere Minuten heftig gegläht und nach frischem Poliren mit noch ungebrauchtem Material untersucht. Es zeigte sich aber gegen vorher kein Unterschied.

Nun wurde die Kupferkathode mit einem Kolbe'schen Elektrometer verbunden, bei einer Ladung von 1500 Volt mit Bogenlicht bestrahlt und die Zeit notirt, innerhalb deren die Divergenz des Aluminiumblättchens auf Null zurückging. Derselbe Versuch wurde darauf mit Zink gemacht. Die Entladung erfolgte bei diesen Versuchen in die freie Luft, indem die Anode vom Mikrometer entfernt war.

Bei Cu dauerte die Entladung im Mittel:	41 sec,
„ Zn „ „ „ „	65 „
Daraus folgt Cu empfindlicher als Zn:	37 Proc.

Derselbe Versuch wurde nun wiederholt mit dem Unterschiede, dass jetzt die beiden Kathoden mit feinem Smirgel eben matt geschliffen waren.

Bei Cu dauerte die Entladung im Mittel:	100 sec,
„ Zn „ „ „ „	90 „
Daraus folgt Zn empfindlicher als Cu:	10 Proc.

Man sieht daraus, dass sowohl die absolute, wie die relative Empfindlichkeit in hohem Maasse von der mechanischen Beschaffenheit der Kathodenoberfläche abhängt.

Ein ähnlich abweichendes Verhalten zu einander zeigten Pt und Zn. Nach den Resultaten früherer Beobachter steht Pt dem Zn an lichtelektrischer Empfindlichkeit nach. Die hier beschriebenen Versuche aber ergaben in der Nähe des Funkenpotentials für Pt eine grössere Empfindlichkeit als für Zn. Aus diesem Grunde wurde bei einem hohen Funkenpotential (6500 Volt) eine vergleichende Beobachtung zwischen Pt und Zn angestellt, die dieses Verhalten aufklärt.

1) A. Righi, Beibl. 13. p. 41. 1889.

Pt			Zn		
V		J	V		J
1470	prop.	4	1470	prop.	6
2670		7	2770		8
3610		10	3440		13
4300		16	4680		21
4810		32	4870		28
5000		48	5020		37

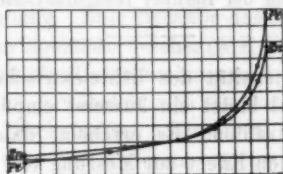


Fig. 5.

Die aus den erhaltenen Zahlen construirten Curven (Fig. 5) schneiden sich ungefähr an der Stelle, wo das starke Steigen der Stromintensität seinen Anfang hat.

Berlin, Physik. Institut, Juli 1901.

(Eingegangen 8. August 1901.)

**13. Anwendung des photoelektrischen Stromes  
zur Photometrie der ultravioletten Strahlen;  
von H. Kreusler.**

(Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation.)

Die grosse Intensität des lichtelektrischen Effectes nahe am Funkenpotential bietet ein äusserst empfindliches Reagenz auf ultraviolette Strahlen. Es erscheint daher der Gedanke, den photoelektrischen Effect zur Messung von Lichtintensitäten heranzuziehen, als naheliegend. Bedingung für die Brauchbarkeit desselben für die Photometrie ist natürlich die Proportionalität mit der Intensität des erregenden Lichtes.

Nach den Versuchen von Elster und Geitel<sup>1)</sup>, die Kaliumzellen zur Vergleichung von Lichtstärken benutzten, ist bei relativ niederen Potentialen diese Proportionalität vorhanden. In grosser Nähe des Funkenpotentials ist sie es, wie sich im Laufe der Untersuchung ergab, im allgemeinen nicht. Durch eine besonders empfindliche Anordnung, die später eingehender beschrieben ist, liess sich eine allzu grosse Annäherung an das Funkenpotential umgehen, sodass die Proportionalität dauernd erhalten blieb. Nachgewiesen und ständig controlirt wurde sie durch zwei Sectorblenden, die eine zur Projection des Bildes der Belichtungsfunken auf den Spectrometerspalt dienende Quarzlinse je zur Hälfte verdecken konnten. War die gesuchte Proportionalität vorhanden, so musste die photoelektrische Intensität bei ganz geöffneter Linse gleich sein der Summe der Intensitäten, die sich ergaben, wenn erst die eine, dann die andere Hälfte der Linse verdeckt war.

Literaturangaben über bereits vorhandene Photometer für ultraviolettes Licht und eine Besprechung der wichtigsten unter ihnen finden sich in der Dissertation.

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 48. p. 625. 1893.

**Die photoelektrische Methode.****1. Belichtungsfunken.**

In der Folge handelt es sich immer um spectral zerlegtes Licht, was zur Erlangung einer hinreichenden Intensität sehr kräftige Funken notwendig machte. Deshalb kam ein grosses Inductorium (Spulenlänge 45 cm) in Verbindung mit zwei Leydener Flaschen von je 2170 cm<sup>2</sup> Aussenbelegung in Anwendung. Die Stromstärke (bei Dauerschluss) betrug 16 Amp. bei 110 Volt Spannung. Zum Betriebe des Inductoriums diente ein Quecksilber-Turbinenunterbrecher (A.E.G.).<sup>1)</sup> Die mit einem Tourenzähler ermittelte Unterbrechungszahl betrug 40 pro sec.

Als Elektroden bewährten sich am besten 0,3 mm dicke, 4–5 mm breite Blechstreifen. Dieselben standen, der eine in der Verlängerung des anderen, vertical, die Kante dem Spectrometerspalt zugekehrt.

Da sich die Elektroden mit der Zeit verkürzen, ist natürlich die Lichtintensität einer allmählichen Aenderung unterworfen. Diese verläuft aber ganz continuirlich und ist, weil nur vergleichende Beobachtungen unmittelbar hintereinander in Frage kommen, vollkommen bedeutungslos.

Als Elektrodenmaterial diente Aluminium, Zink und eine Legirung von gleichen Teilen Zink und Cadmium mit einem Zusatz von 5 Proc. Antimon.

Besonderer Erwähnung bedarf es, dass ausser bei Al nie constantes Licht erzielt werden konnte, wenn beide Elektroden aus gleichem Metall bestanden. Dies gelang nur, wenn der negative Pol Al war. Manche Metalle, wie Cu, Ni, Ag, Messing, gaben überhaupt kein ruhiges Licht.

Die Elektroden liessen sich an einem Halter immer in gleicher Stellung mittels  $\Omega$ -förmiger Federn anklebmen. Der Halter war, um seitliche Bewegung der Funkenstrecke zu ermöglichen, an einer Verlängerung der Collimatoralhidade um eine verticale Axe drehbar befestigt. Die genaue Einstellung der Funkenbahn wurde mit zwei Druckschrauben bewerkstelligt.

1) Eine Reihe mit dem Wehnelt'schen Flüssigkeitsunterbrecher (mit innerer Wasserkühlung) angestellter Versuche lieferte keine übereinstimmenden Resultate.

## 2. Spectrometer.

Da eine einmalige Zerlegung des Lichtes kein genügend reines Spectrum lieferte, wurde dieselbe durch zwei getrennte Spectrometer vollzogen. Das austretende Licht erwies sich so als hinreichend homogen.

Auf dem Spectrometer I (Fig. 1) befand sich ein kleines Fluoritprisma mit brechendem Winkel von  $58^{\circ} 39' 42''$ . An dem beweglichen Arm von I befand sich ausser dem Collimatorrohr die Funkenstrecke  $F$  und die kleine Projectionslinse (1) aus Quarz. Um hinter dem Prisma  $P_1$  Platz für die

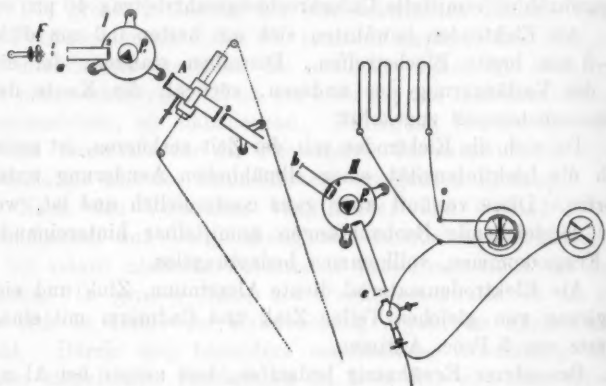


Fig. 1.

Absorptionsgefässe zu gewinnen, war das Fernrohr von I entfernt und in grösserem Abstände mit besonderem Stativ aufgestellt. In der Brennebene der Linse (3) für Na-Licht befand sich der Collimatorschlitz ( $b$ ) des Spectrometers II. Das durch ( $b$ ) ausgeblendete noch unhomogene Lichtbündel wird durch  $P_1$  (brechender Winkel gleich  $60^{\circ}$ ) zum zweiten Male zerlegt, sodass schliesslich durch den Schlitz ( $c$ ) Licht von genügender Reinheit austritt. Am Spectrometer II ist das Collimatorrohr fest. ( $c$ ) befindet sich in der Brennebene von (5) ebenfalls für Na-Licht, sodass bei Beleuchtung von ( $a$ ) mit der Natriumflamme in ( $c$ ) eine scharfe Linie liegt.

Die Spaltbreiten waren so gewählt, dass ( $b$ ) von dem auf seine Ebene projecirten Bild von ( $a$ ) auf jeder Seite etwa  $\frac{1}{6}$



der Breite weglendete. Ein ähnliches Verhältnis bestand zwischen (c) und (b). Die Oeffnung betrug von (a):  $26' = \text{ca. } 1 \text{ mm}$ , die von (b):  $50' = 1,8 \text{ mm}$  und die von (c):  $45' = 3 \text{ mm}$ , die Winkel von der Mitte der Collimatorobjective aus gerechnet. Mit Ausnahme von (4) waren alle Linsen aus Quarz und gut senkrecht zur Hauptaxe geschnitten. (4) war ein System von zwei Fluoritlinsen. Die Brennweiten der einzelnen Linsen waren (für D-Licht) (1): ca. 3 cm; (2): 12,5 cm; (3): 24,5 cm; (4): 12,5 cm und (5): 23,5 cm.

Genaue Angaben betreffs der Justirung der Apparate finden sich in der Dissertation.

Zur Calibration der Prismen dienten die von Sarasin<sup>1)</sup> angegebenen Brechungsexponenten des Flussspates für ultraviolette Licht.

### 3. Photoelektrische Zelle.

Dieselbe beruht auf der von Warburg<sup>2)</sup> nachgewiesenen ausserordentlichen lichtelektrischen Empfindlichkeit der Metalle in verdünntem Wasserstoff.

Eine 6 cm weite Glaskugel (Fig. 2) trägt zwei Schliffstücke  $S_1$  und  $S_2$  zur Einführung der Kathode  $K$  und der Anode  $A$ .

Die Kathode, eine Calotte aus Platinblech, ist auf ein rundes Messingstück vom gleichen Durchmesser (12 mm) aufgelötet. Das Messingstück kann mit einem Rohransatz auf die Verlängerung einer stählernen Mikrometerschraube  $s$  aufgesteckt werden. Die in  $S_1$  festgekittete Mutter  $m$  ist aus Ebonit gefertigt. Sie besitzt eine Ausdrehung  $a$ , die ihrerseits mit einer Korkplatte  $k$  verschlossen ist, durch welche die schwach eingefettete Schraube hindurchgeht. Der übrigbleibende Hohlraum von  $a$  enthält zur vollkommenen Abdichtung der Schraube

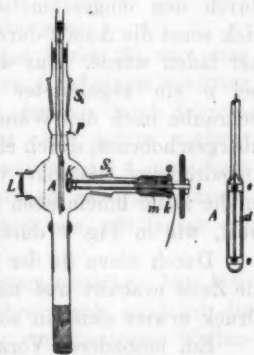


Fig. 2.

1) E. Sarasin, Arch. d. sc. phys. (3) 10. p. 303. 1883.

2) E. Warburg, Wied. Ann. 62. p. 385. 1897.

Quecksilber. Ein durch den Kork gestecktes Stück Kupferdraht vermittelt die elektrische Zuleitung.

Durch den Schliff  $S_2$  ist ein engeres Glasrohr luftdicht und isolirt eingeführt. Dieses Glasrohr läuft innerhalb der Kugel in einen aus dünnen Glasstäbchen gefertigten Rahmen aus. In einem Abstände von 27 mm sind auf ihm zwei Ebonitplättchen  $e$  befestigt, auf denen in 1 mm Abstand die beiden 0,1 mm dicken Anodendrähte  $d$  aus Platin befestigt sind. Durch die Federkraft des Glasrahmens werden die Drähte gespannt gehalten. Versuche hatten ergeben, dass bei Anwendung von zwei Anodendrähten die Wirkung weitaus am intensivsten ist. Durch einen angelöteten stärkeren Platindraht wird die Verbindung der Anode nach aussen vermittelt. Gegenüber der Kathode befindet sich an der Kugel ein Tubus, der zur Aufnahme der Quarzlinse  $L$  dient. Durch sie wird das einfallende Licht auf  $K$  concentrirt. Der untere Ansatz endlich enthält etwas  $P_2O_5$  und dient gleichzeitig zur Befestigung der Zelle an der Fernrohralhidade des Spectrometers II.

Im Innern ist die Kugel versilbert und die Silberschicht durch den eingeschmolzenen Draht  $p$  zur Erde geleitet, da sich sonst die Anode durch Oberflächenleitung von der Kathode her laden würde. Aus demselben Grunde befindet sich aussen bei  $p$  ein abgeleiteter Stanniolring. Entladungen von der Schraube nach den Wänden des Schliffes  $S_1$  werden durch ein übergeschobenes, durch eine Spiralfeder gegen die Ebonitmutter angedrücktes Glasrohr vermieden. Damit man ungehindert in die Zelle hineinsehen kann, reicht die Versilberung nur so weit, wie in Fig. 2 durch die punktirte Linie angedeutet ist.

Durch einen (in der Figur nicht gezeichneten) Hahn wurde die Zelle evacuirt und mit Wasserstoff gefüllt. Als günstigster Druck erwies sich ein solcher von 200 mm Quecksilber.

Ein besonderer Vorzug der Zelle ist der, dass man ihre Empfindlichkeit ohne Aenderung des Kathodenpotentials mit Hülfe der Mikrometerschraube in beliebigen Grenzen variiren kann. Solche Empfindlichkeitsänderungen werden durch die sehr verschiedenen Intensitäten in einem discontinuirlichen Spectrum notwendig. Bei einer mittleren Empfindlichkeit betrug der Abstand zwischen Kathode und Anode etwa 5 mm.

Die Ladung der Kathode erfolgte durch eine Hoch-

spannungsbatterie und betrug etwa 2040 Volt. Von der Anode ging eine Leitung zum Elektrometer mit einer Abzweigung zur Erde durch einen aus  $\text{CdJ}_2$  in Amylalkohol und Xylol bestehenden Widerstand. Die Grössenordnung derselben war  $10^8$  Ohm.

#### 4. Elektrometer.

Zur Bestimmung der lichtelektrischen Intensitäten diente ein Thomson'sches Quadrantelektrometer mit bifilarer Nadel-aufhängung und geringer Dämpfung. Bei 2 m Scalenabstand betrug die Empfindlichkeit pro Volt 60 Sct. zu 2 mm. Die Ablesungen beziehen sich auf die Umkehrpunkte des ersten Ausschlages der Nadel.

Die Elektrometernadel hatte eine Hülfsladung von 1200 Volt. Es führte zu dem Zwecke vom negativen Pol der Batterie ein sehr hoher, innerhalb gewisser Grenzen veränderlicher Widerstand zur Erde. An einer passenden Stelle ging von diesem Widerstande eine Abzweigung zur Elektrometernadel.

Das Kathodenpotential wurde mit einem Righi'schen Elektrometer beobachtet.

#### 5. Ausführung der Messungen.

Zwischen dem Prisma  $P_1$  und der Linse (3) war eine 20,45 cm lange, 41,5 mm weite Glasröhre  $A$  auf einem Schlitten verschiebbar angebracht, in der Weise, dass sie durch Schnurlauf in den Strahlengang eingeschaltet oder daraus entfernt werden konnte. An beiden Enden waren ca. 4 mm dicke Quarzplatten luftdicht aufgekittet. Durch ein seitliches Ansatzrohr mit Hahn konnte das Rohr evacuirt bez. mit Gasen gefüllt werden.

Die Vergleichung der Elektrometerausschläge bei Ein- und Ausschaltung der evacuirten Röhre ergab zunächst die Extinction durch die Quarzplatten bei verschiedenen Wellenlängen in Procenten. In gleicher Weise wurde nach Füllung der Röhre mit dem betreffenden Gase die Extinction von Quarz plus Gas ermittelt. Zur Controle wurde am Schluss die Messung mit der evacuirten Röhre wiederholt. Daraus ergeben sich die Absorptionscoefficienten wie folgt:

Ist  $J_0$  (nach obigem gleich 100) die Intensität des Lichtes vor dem Eintritt in das Absorptionsgefäss, sind ferner  $p_1$

und  $p_2$  die Schwächungsfactoren der beiden Verschlussplatten,  $p_3$  der Schwächungsfactor des Mediums in der Röhre, so ist die Intensität des die Röhre verlassenden Lichtes  $J_0 p_1 p_2 p_3$ . Ist die Röhre evacuiert, so hat das austretende Licht die Intensität  $J_0 \cdot p_1 p_2$ .

$J_0 \cdot p_1 p_2$  und  $J_0 \cdot p_1 p_2 p_3$  sind aus den Messungen bekannt, daher auch  $p_3$ . Die Absorptionscoefficienten  $\alpha$  berechnen sich aus

$$p_3 = e^{-\alpha d},$$

wo  $d$  die Dicke der absorbirenden Schicht, also in diesem Falle 20,45 cm ist.

Alle für Gase berechneten Absorptionscoefficienten beziehen sich auf 0° C. und 760 mm Druck.

#### 6. Resultate.

a) Atmosphärische Luft.  $p = 747$ ;  $t = 14^\circ$ .

Trockene,  $\text{CO}_2$ -freie Luft absorbierte bei  $\lambda = 186 \mu\mu$  8,8 Proc. Daraus folgt:

$$\alpha = 0,00447.$$

Bei längeren Wellen ( $\lambda = 193$ ) konnte mit Sicherheit keine Absorption mehr nachgewiesen werden.

b) Kohlendioxyd.  $p = 750$ ;  $t = 15^\circ$ .

Die Kohlensäure wurde im Kipp'schen Apparat aus Marmor und reiner Salzsäure entwickelt, mit Sodalösung gewaschen und mit  $\text{P}_2\text{O}_5$  getrocknet.

Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

$\lambda$	Absorption in Proc.	$\alpha$
186	13,6	0,00574
193	4,0	0,00218
200	1,8	0,00079

c) Sauerstoff.  $p = 759$ ;  $t = 18,5^\circ$ .

Aus einer Mischung von  $\text{KClO}_3$  und  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  wurde der Sauerstoff durch Erhitzen in einem Rohr aus böhmischem Glase entwickelt und zur Reinigung durch Wasser, Natronkalk und Phosphorperoxyd geleitet.

Es wurden folgende Mittelwerte erhalten:

$\lambda$	Absorption in Proc.	$\alpha$
186	32,5	0,02057
193	6,2	0,00336
200	—	—

d) Stickstoff.

Aus dem Mengenverhältnis der Bestandteile der atmosphärischen Luft und den Absorptionscoefficienten für Luft und Sauerstoff bei  $\lambda = 186$  ergibt eine angenäherte Rechnung für Stickstoff eine Absorption von 2,1 Proc.

Durch einen besonderen Versuch sollte das bestätigt werden.

Zunächst wurde Stickstoff in üblicher Weise aus Natriumnitrit und Ammoniumsulfat dargestellt, mit Wasser gewaschen, über Natronkalk geleitet und mit  $P_2O_5$  getrocknet. Die Messung lieferte unerwarteter Weise bei  $186 \mu\mu$  für die Absorption 14,3 Proc. Obgleich zur Stickstoffbereitung chemisch reine Präparate (Kahlbaum) genommen waren, enthielt der so gewonnene Stickstoff eine Verunreinigung. Eine genaue Prüfung mit Jodkaliumstärkelester und mit Antipyrin, die sich erst bei Zutritt von Sauerstoff färbten, ferner mit Ferrosulfat ergab als solche NO.

Vorläufig wurde daher zur Untersuchung atmosphärischer Stickstoff, erhalten durch Ueberleiten von Luft über glühendes Kupfer, herangezogen. Dieser Stickstoff absorbierte in der That bei  $\lambda = 186$  2,2 Proc. entsprechend einem Werte von  $\alpha = 0,00110$ .

e) Stickoxyd.  $p = 600$ ;  $t = 18^\circ$ .

Die zu Anfang an Stickstoff gemachten Erfahrungen liessen für Stickoxyd ein besonders starkes Absorptionsvermögen vermuten. Dies war noch experimentell zu beweisen.

Reines NO wurde erhalten durch Erwärmen einer Lösung von Stickoxyd aus Kupfer und Salpetersäure in Ferrosulfat. Zur Vermeidung von Oxydation waren vor der Füllung des Absorptionsrohres alle in Frage kommenden Teile des Apparates mit Wasserstoff ausgespült. In der That zeigte das Gas bei

Prüfung mit einem stark dispergirenden Spectroskop im sichtbaren Spectrum keine Spur von dunklen Linien.

Das Ergebnis der Messung war folgendes:

$\lambda$	Absorption in Proc.	$\alpha$	$\lambda$	Absorption in Proc.	$\alpha$
186	—	—	240	30,5	0,02406
193	—	—	250	4,7	0,00318
200	88,4	0,14932	.	.	.
210	76,3	0,09526	.	.	.
220	72,0	0,08424	.	.	.
230	54,6	0,05223	300	1,2	0,00083

Die in die Versuchsergebnisse eingehenden etwaigen Fehler sind in der Dissertation behandelt.

#### f) Wasser.

Für die Versuche mit Wasser wurden mir aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt vier ausgezeichnete Quarzplatten von 5 cm Durchmesser und 1 mm Dicke, sowie ein sehr exact gearbeiteter Trog von 20 mm Dicke und 4 cm lichter Weite mit Fassung zur Verfügung gestellt, wofür ich Hrn. Präsident Kohlrausch und Hrn. Prof. Lummer zu grossem Dank verpflichtet bin. Die Endflächen des Troges waren genau planparallel und auspolirt, sodass die Platten keiner Kittung bedurften.

Zur Herstellung eines zweiten Absorptionsgefässes wurde aus einer ausgesuchten, 3,03 mm dicken Spiegelglasplatte mit fast genau planparallelen Flächen ein 4 cm weites Loch und ein als Einguss dienender Schlitz ausgeschnitten. Auch dieses Gefäss brauchte nicht gekittet zu werden.

Nachdem die Tröge 24 Stunden mit destillirtem Wasser gestanden hatten, wurden sie nach wiederholtem Ausspülen mit frisch destillirtem Wasser gefüllt und sofort die Absorption der 16,97 mm dicken Wasserschicht gemessen. Es ergab sich:

$\lambda$	Absorption in Proc.
186	71,5
193	48,3
200	31,8

Am nächsten Morgen, nachdem das Wasser in den Trögen über Nacht gestanden hatte, absorbierte es bei  $200\ \mu\mu$  70,6 Proc. Danach musste sich etwas von den Wänden der Tröge gelöst haben, und diese Lösung musste ein ungemein starkes Absorptionsvermögen haben. Da es sich nur um die Substanz des Glases handeln konnte, wurde künstlich eine wässrige Lösung von Thüringer Glas hergestellt, diese mit dem zehnfachen Volumen Wasser verdünnt und die Absorption gemessen. Sie fand sich für  $\lambda = 200\ \mu\mu$  zu 34,3 Proc. Reines Wasser absorbiert bei dieser Wellenlänge nicht über 14,2 Proc.

Constante Zahlen konnten erhalten werden mit Wasser, welches in einen Kolben aus sogenanntem Hartglas (von Schott und Gen. in Jena) nach Beseitigung der zu Anfang übergehenden Teile destilliert war. Die Absorption nahm nicht merklich zu, auch wenn das Wasser 48 Stunden im Hartglaskolben gestanden hatte. Für jede einzelne Wellenlänge, bei der Messungen stattfanden, wurden die Tröge mit neuem Wasser beschickt.

Es wurden folgende Werte gefunden:

$\lambda$	Absorption in Proc.	$\alpha$	$\lambda$	Absorption in Proc.	$\alpha$
186	68,9	0,06884	230	5,6	0,00338
193	24,5	0,01658	240	5,2	0,00316
200	14,2	0,00899	260	4,2	0,00254
210	9,8	0,00610	300	2,5	0,00151
220	9,2	0,00567			

Graphische Darstellung vgl. Fig. 3.

Obwohl wiederholte Messungen bei ein und derselben Wellenlänge zu verschiedenen Zeiten übereinstimmende Resultate gaben, würde ich doch die Behauptung, die oben angegebenen Zahlen seien die Absorptionscoefficienten des reinen Wassers, für gewagt halten. Letztere sind vielleicht ein wenig kleiner, jedenfalls nicht grösser als jene.

Um schliesslich einen Anhalt zu bekommen, was für Bestandteile des Glases für die starke Absorption in Frage kommen können, wurden Lösungen von KHO und NaHO von 0,01 Proc. Gehalt bei  $\lambda = 200\ \mu\mu$  auf Absorption geprüft. Die KHO-



Lösung absorbierte 76,4 Proc. und die NaHO-Lösung 82,7 Proc. Die naheliegende Vermutung, dass sich aus dem Glase Alkali gelöst habe, wird hierdurch bestätigt. Berliner Leitungswasser absorbierte bei  $200\ \mu\mu$  82,6 Proc.

Zum Schluss ist noch eine etwaige Fehlerquelle in der Versuchsanordnung zu behandeln.

Die Spectrometer waren mit Na-Licht focurirt worden. Die Brennweiten für ultraviolettes Licht sind aber beträchtlich

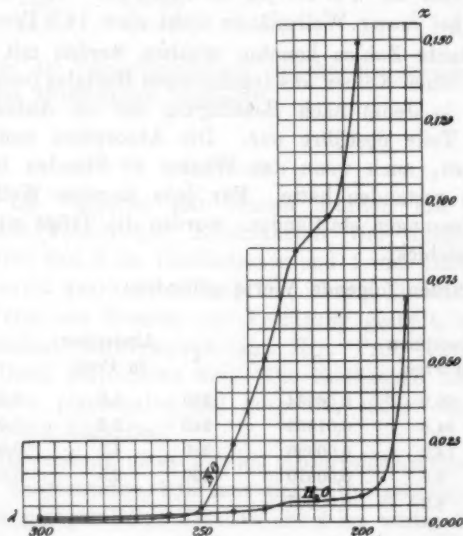


Fig. 3.

kürzer als für sichtbares. Zur genauen Einstellung der ultravioletten Brennweiten hätten sämtliche Objective eine exacte Einstellvorrichtung haben müssen. Da sich solche an den vorhandenen Apparaten nicht gut anbringen liess, und ausserdem die Einjustirung mit Na-Licht einer häufigen Controle bez. Correction bedurfte, musste der erwähnte Uebelstand mit in den Kauf genommen werden.

Die Absorptionscurven (Fig. 3), namentlich die des Wassers zwischen  $\lambda = 186$  und  $193\ \mu\mu$  lassen indessen vermuten, dass



bedeutendere Fehler durch die mangelhafte Focussirung nicht verursacht wurden.

Die vorliegenden Arbeiten wurden im physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt. Dem Leiter des Institutes, Hrn. Prof. Dr. E. Warburg, bin ich für die Anregung und stete Teilnahme bei diesen Untersuchungen zu grossem Danke verpflichtet.

Berlin, Physik. Institut, Juli 1901.

(Eingegangen 3. August 1901.)

**14. Werte der erdmagnetischen Elemente  
zu Potsdam für das Jahr 1900, sowie der Säcular-  
variationen für die Zeit von 1890 bis 1900;  
von M. Eschenhagen.**

(Mitgeteilt vom Magnetischen Observatorium des Königl. Preuss.  
Meteorologischen Instituts.)

Die aus den stündlichen Werten aller Tage der photographisch registrierten magnetischen Elemente, Declination, Horizontalintensität und Verticalintensität sind für das Jahr 1900 folgende Mittelwerte abgeleitet worden:

Element:	Werte für 1900:	Änderungen gegen 1890:
Declination:	9° 56,3' West	Abnahme 4,4'
Horizontalintensität:	0,18844 C.G.S.	Zunahme 0,00026 C.G.S.
Verticalintensität:	0,43466 C.G.S.	Zunahme 0,00074 C.G.S.
Inclination:	66° 33,7' Nord	Zunahme 0,4'
Totalintensität:	0,47375 C.G.S.	Zunahme 0,00078 C.G.S.

Die Sicherheit der angegebenen Zahlen dürfte für die beiden ersten Elemente eine befriedigende, weniger gut für die drei letzten Elemente sein. Um ein besseres Urtheil über die Säcularvariation zu bieten, seien nachstehend die Werte derselben angegeben, wie sie, in gleicher Weise wie die obigen, seit dem elfjährigen Bestehen des Observatoriums erhalten worden sind. Dieselben sind für Declination und Inclination in Bogenminuten, für die übrigen Elemente in Einheiten der fünften Decimalstelle, C.G.S. (neuerdings mit dem Buchstaben  $\gamma$  bezeichnet), angegeben, wobei das Vorzeichen + eine Zunahme, — eine Abnahme bezeichnet. (Vgl. p. 425, Tabelle der Säcularvariation für 1890—1900.)

Man ersieht aus diesen Zahlen und noch besser aus der Reihe der absoluten Werte der Elemente, wenn man dieselben in einer Curve aufträgt, dass die jährliche Abnahme bei Declination und Inclination sich im Laufe des letzten Decenniums in Potsdam verringert, die jährliche Zunahme der Horizontalintensität sich etwas vermehrt hat, jedoch erscheint der Zeitraum von 10 Jahren noch nicht lang genug, um diese Änderung

Tabelle der Säcularvariation für 1890—1900.

Element:	1890/91:	91/92:	92/93:	93/94:	94/95:	95/96:	96/97:	97/98:	98/99:	99/00:	Mittel 1890—1900:
Declination:	-6,5'	-6,0'	-4,9'	-5,9'	-5,5'	-5,6'	-4,6'	-4,7'	-4,3'	-4,4'	-5,23'
Horizontalintensität:	+19	+10	+31	+18	+26	+26	+29	+19	+24	+26	+22,7
Verticalintensität:	-85	+40	+43	-16	-16	+12	-6	+10	-16	+74	+3,9
Inclination:	-3,4'	+0,5'	-0,8'	-1,7'	-2,2'	-1,4'	-2,1'	-1,0'	-2,0'	+0,4'	-1,88
Totalintensität:	-70	+40	+52	-7	-5	+21	+6	+17	-6	+78	+12,7

Variation der mittleren jährlichen Amplituden der drei Hauptelemente im elfjährigen Zeitraum.

	1890:	1891:	1892:	1893:	1894:	1895:	1896:	1897:	1898:	1899:	1900:
Declination:	{ Winter 5,42'	{ Winter 6,38'	{ Winter 7,05'	{ Winter 7,02'	{ Winter 7,32'	{ Winter 7,45'	{ Winter 6,59'	{ Winter 5,73'	{ Winter 5,57'	{ Winter 5,14'	{ Winter 4,60'
	{ Sommer 9,12	{ Sommer 10,89	{ Sommer 11,81	{ Sommer 13,17	{ Sommer 12,23	{ Sommer 11,95	{ Sommer 10,89	{ Sommer 9,61	{ Sommer 9,55	{ Sommer 9,12	{ Sommer 8,97
Horizontalintensität:	{ Winter 16,6	{ Winter 21,0	{ Winter 24,4	{ Winter 28,3	{ Winter 24,6	{ Winter 23,3	{ Winter 19,3	{ Winter 17,4	{ Winter 14,9	{ Winter 15,3	{ Winter 14,4
	{ Sommer 29,3	{ Sommer 36,1	{ Sommer 47,2	{ Sommer 47,9	{ Sommer 49,1	{ Sommer 44,1	{ Sommer 39,9	{ Sommer 42,4	{ Sommer 34,9	{ Sommer 33,3	{ Sommer 27,4
Inclination:	{ Winter 0,99	{ Winter 1,34	{ Winter 1,71	{ Winter 1,79	{ Winter 1,51	{ Winter 1,51	{ Winter 1,20	{ Winter 1,06	{ Winter 0,90	{ Winter 0,94	{ Winter 0,85
	{ Sommer 1,66	{ Sommer 2,14	{ Sommer 2,70	{ Sommer 2,71	{ Sommer 2,82	{ Sommer 2,46	{ Sommer 2,23	{ Sommer 1,87	{ Sommer 1,90	{ Sommer 1,93	{ Sommer 1,58
Summe d. Störungen der drei Elemente:	{ 728	{ 1687	{ 2880	{ 1447	{ 2483	{ 2106	{ 1962	{ 1693	{ 2477	{ 2657	{ 374

als quadratisches Glied hinreichend sicher zu ermitteln, um so weniger als dann verfrühte Folgerungen für das Eintreten von Umkehrpunkten daraus abgeleitet werden würden. Vorläufig würde man also, wenn man sich mit einer linearen Formel begnügt, mit der mittleren Säcularvariation zu rechnen haben, und die sicheren Werte des Jahres 1900 als Ausgangspunkt nehmend, folgende Gleichungen ableiten:

$$\text{Declination: } D_x = 9^\circ 56,3' + 5,2' (1900 - x),$$

$$\text{Horizontalintensität: } H_x = 18844 - 22,7 (1900 - x),$$

$$\text{Inclination: } J_x = 66^\circ 33,7' + 1,4' (1900 - x).$$

Für die Vertical- und Totalintensität ist es bei der Unsicherheit der Säcularänderung am geratesten, nur mit den Mittelwerten des elfjährigen Zeitraumes 0,43404 bez. 0,47270 zu rechnen.

Die mittleren jährlichen Amplituden der drei Hauptelemente variirten in dem elfjährigen Zeitraum wie die auf p. 425 gegebenen Reihen zeigen.

Die Zahlen bieten dem Physiker ein Bild, welche regelmässigen täglichen Veränderungen jener drei Elemente nach Jahreszeit und Jahr zu erwarten sind; die Abhängigkeit von der Sonnenfleckenperiode ist deutlich ausgeprägt und bedarf einer besonderen Untersuchung. Die Zahl der Störungen dürfte durch ein subjectives Element beeinflusst sein. Ein Bild des regelmässigen täglichen Verlaufes nach Stundenwerten ist in dem Bericht über das Jahr 1896<sup>1)</sup> gegeben. Man kann noch hinzufügen, dass bei magnetischen Stürmen die Abweichungen eines Elementes von seinem normalen Werte den zehnfachen Betrag der oben angegebenen Amplituden, wenn auch nur in seltenen Fällen, erreichen können.

Weiter ist noch für das Jahr 1900 zu erwähnen, dass Störungen von längerer Dauer und erheblichem Betrage (Charakter 4 oder 5 der Scala, in welcher 0 ganz ruhige Curven, 5 stärkste Störungen bedeuten) an folgenden Tagen stattfanden:

19. Januar, 4. Februar, 8., 9. u. 13. März, 5. Mai.

1) M. Eschenhagen, Wied. Ann. 61. p. 411. 1897.

Die Zahl der Stunden, an welchen überhaupt Störungen einschliesslich der von kürzerer Dauer auftraten (Charakter 3—5 der obigen Scala), betrugen in Declination 245, in Horizontalintensität 435, in Verticalintensität 194.

Die magnetische Landesaufnahme erstreckte sich im Sommer 1900 auf 54 Stationen, welche sämtlich durch Hrn. Dr. Edler erledigt wurden. Nunmehr ist die magnetische Vermessung des östlich von einer Linie Lübeck-Potsdam-Görlitz gelegenen Teiles des Königreichs Preussen beendet und auch in der Rechnung nahezu fertig gestellt.

Der seitens der Institutsleitung gegen die Benutzung der Erde in der Nähe des Observatoriums zu Starkstromleitungen erhobene Widerspruch hat zur Folge gehabt, dass die Stadt Potsdam ihre elektrische Centrale mit Drehstrombetrieb einrichtet, während die elektrische Strassenbahn in Potsdam, welche mit Gleichstrom arbeiten soll, eine doppelpolige, gegen die Erde isolirte Oberleitung anlegen wird. Auf diese Weise dürfte das Observatorium gegen die störenden Einflüsse vagabondirender Erdströme nach Möglichkeit gesichert und eine Verlegung desselben voraussichtlich nicht erforderlich sein.

(Eingegangen 19. Juli 1901.)

**15. Ueber quecksilbergedichtete Hähne;  
von Hermann Thiele und Moritz Eckardt.**

Die Zahl der Hahnconstructions, welche eine *absolute* Dichtung durch Quecksilber bezwecken, ist eine relativ grosse. Zum Teil sind es wohl die Fortschritte gasanalytischer Methoden, speciell der zur Gewinnung der Edelgase dienenden, welche eine bessere Dichtung als die durch einen gewöhnlichen Glashahn gewährleistete fordern. Die uns bekannten Constructions bieten jedoch nur gegen das Eindringen der Luft von aussen her Garantie, versagen aber ihren Dienst, wenn es sich darum handelt, jede Möglichkeit des Eindringens von Gas auch durch die Bohrung auszuschliessen.

Handelt es sich nur darum, den Hahn gegen aussen zu dichten, so ist diese Aufgabe relativ einfach lösbar. Am einfachsten erreicht man dies durch Einsetzen des ganzen Hahnes

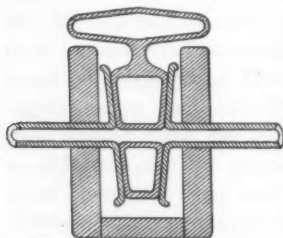


Fig. 1.

in Quecksilber. Man kann leicht jeden gewöhnlichen Hahn in einen derartigen nach aussen quecksilbergedichteten verwandeln, wenn man ihn mit einem kleinen, zur Aufnahme des Quecksilbers dienenden Behältnisse umgiebt. Sehr leicht lässt sich dies aus Kork (vgl. Fig. 1) herstellen.

Man bohrt durch einen grossen Kork mit dem Korkbohrer ein Loch, welches einige Millimeter grösser als der Hahnmantel ist, fügt den entsprechend verkürzten Ausschnitt wieder als Boden ein, kocht das Ganze in Paraffin, scheidet für Zu- und Ableitungsröhr entsprechende Streifen aus dem Mantel aus und kittet dieselben nach Einsetzen des Hahnes wieder mit Paraffin ein. In der Richtung der Bohrung ist dieser Hahn ebenso wenig wie ein gewöhnlicher dicht. Durch schräge Bohrung lässt sich

wohl ein höherer Grad von Dichtung erzielen, *absolut* dicht wird er aber auch hierdurch *nicht*.

Die Hauptursache der Undichtigkeit in der Längsaxe wird ja bekanntlich durch feine, je nach der Behandlung und Qualität des Schliffes mehr oder minder bemerkbare, kreisförmig um das Kücken laufende Rillen hervorgerufen. Bei schrägebohrten Hähnen wird der Weg, den das Gas durch diese capillaren Rillen zurückzulegen hat, grösser und die Dichtung infolge dessen eine vollkommenerere. Ganz aufgehoben wird aber durch die Schrägbohrung der Durchgang der Gase nicht. Aus diesem Grunde bietet auch die von Göckel<sup>1)</sup> vorgeschlagene dreifache Hahndichtung keine Gewähr für einen absolut gasdichten Verschluss. Das Gas geht einfach vom Eintrittsrohr durch die erste Rille zur Bohrung, dann durch die Bohrung und durch die zweite Rille zur Austrittsöffnung des Hahnes. Der Weg ist ziemlich lang, (er beträgt fast einen ganzen Kreisumfang,) denselben Weg

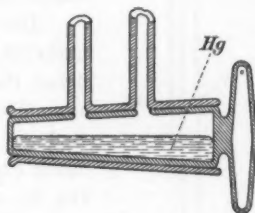


Fig. 2.

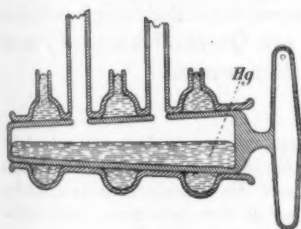


Fig. 3.

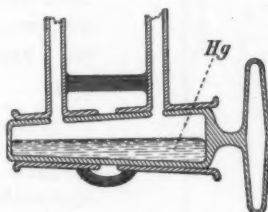


Fig. 4.

müssen aber die Gase auch bei jedem anderen schrägebohrten Hahne nehmen, wenn sie durch die Rillen wandern wollen.

Will man sich gegen die durch die Rillen veranlasste Undichtigkeit schützen, so muss man die *Rillen* selbst durch *Quecksilber* verschliessen. Dies erreicht man am einfachsten durch die in Fig. 2 wiedergegebene Anordnung, welche wohl einer Erklärung nicht bedarf.

1) Göckel, Zeitschr. f. angew. Chemie p. 1238. 1900.

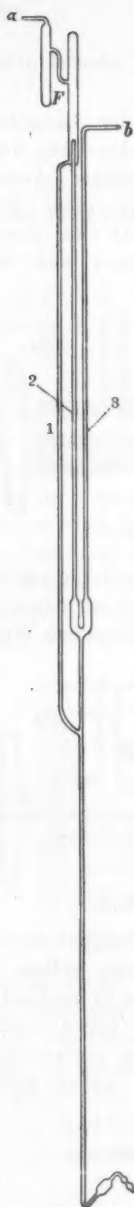


Fig. 5.

Wenn man will, kann man diesen Hahn natürlich mit Quecksilbernuten versehen. Diese Nuten müssen aber entsprechend gross sein, damit sich das Quecksilber trotz der Capillarkwirkungen gut an das Glas anlege. Man verlegt diese Nuten wohl besser in den Hahnmantel (vgl. Fig. 3) oder man schneidet den Hahnmantel in der Mitte auseinander und taucht ihn ganz unter Quecksilber (vgl. Fig. 4).

Die *vollkommenste* Hahnverbindung wird natürlich erreicht, wenn man auf den gewöhnlichen Hahn ganz verzichtet und die Dichtung ausschliesslich durch Quecksilber bewerkstelligt. Eine derartige Hahnconstruction ist durch Fig. 5 wiedergegeben. Das Gas strömt von *b*, dem Raum mit grösserem Drucke nach *a*, dem angeschmolzenem<sup>1)</sup> Raum mit niederem Drucke, nachdem es eine, der Druckdifferenz zwischen *b* und *a* entsprechend hohe Quecksilbersäule durch die Capillare 2 transportirt und in *F* abgesondert hat. Soll der Hahn auch in umgekehrter Richtung benutzbar sein, so müsste eine Quecksilberfalle (*F*) auch bei *b* angeschmolzen werden.

1) Derartige Anschmelzungen sind auch bei relativ complicirten Apparaten *ohne* erhebliche Schwierigkeiten ausführbar, wenn man die *zusammenschmelzenden* Apparatenteile vorher an den definitiven Platz durch mit Kork ausgefüllte Muffen, Gyps etc. endgültig befestigt, dann durch Biegen über der leuchtenden Flamme die frisch abgeschnittenen Rohrenden in die gewünschte Stellung bringt und dieselben unter gelindem Druck durch Erhitzen mit der Gebläseflamme und entsprechendes Verblasen *zusammenschmilzt*.

Es gelang uns auf diese Weise ohne wesentliche Schwierigkeiten über 25 m Glasrohr zu einem einzigen verschmolzenen Apparate zu vereinigen. Diese Methode des „Lötens am Ort“ wird nach unserer Meinung bei der Zusammensetzung complicirterer Glasapparate noch viel zu wenig geübt.



Durch entsprechendes Senken des Niveaus hat man es ganz in der Gewalt, grosse oder kleine Gasblasen von *b* nach *a* übertreten zu lassen oder auch die Communication zwischen *a* und *b* herzustellen.

Ein manchmal wesentlicher Vorteil dieses Apparates liegt auch darin, dass Verunreinigungen der Gase durch *Fettdämpfe etc.* ausgeschlossen sind.

(Eingegangen 22. Juli 1901.)

---

### 16. Berichtigung; von J. Zenneck.

In Band 5, Seite 708 sollen die Gleichungen (3) heissen:

$$(3) \quad \begin{cases} a_{i1} = a_{i2} = \dots a_{i, i-1} = a_{i, i+1} = \dots = a_{in} = 0, \\ c_{i1} = c_{i2} = \dots c_{i, i-1} = c_{i, i+1} = \dots = c_{in} = 0, \end{cases}$$

nicht:

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots a_{i-1} = a_{i+1} = \dots = a_n = 0, \\ c_1 = c_2 = \dots c_{i-1} = c_{i+1} = \dots = c_n = 0. \end{cases}$$

Seite 715, Zeile 18 u. 19:

$$\begin{aligned} c_{ik} \cdot \psi_i \cdot \psi_k &= \int F_i \cdot s_k \cdot \cos(F_i, s_k) \cdot \rho \, d\tau \\ &= \int F_k \cdot s_i \cdot \cos(F_k, s_i) \cdot \rho \, d\tau, \end{aligned}$$

nicht:

$$\begin{aligned} c_{ik} \cdot \psi_i \cdot \psi_k &= \int F_i \cdot \psi_k \cdot \cos(F_i, \psi_k) \cdot \rho \, d\tau \\ &= \int F_k \cdot \psi_i \cdot \cos(F_k, s_i) \cdot \rho \, d\tau. \end{aligned}$$

In den Anmerkungen ist überall J. J. Thomson durch W. Thomson zu ersetzen.

(Eingegangen 31. Juli 1901.)

